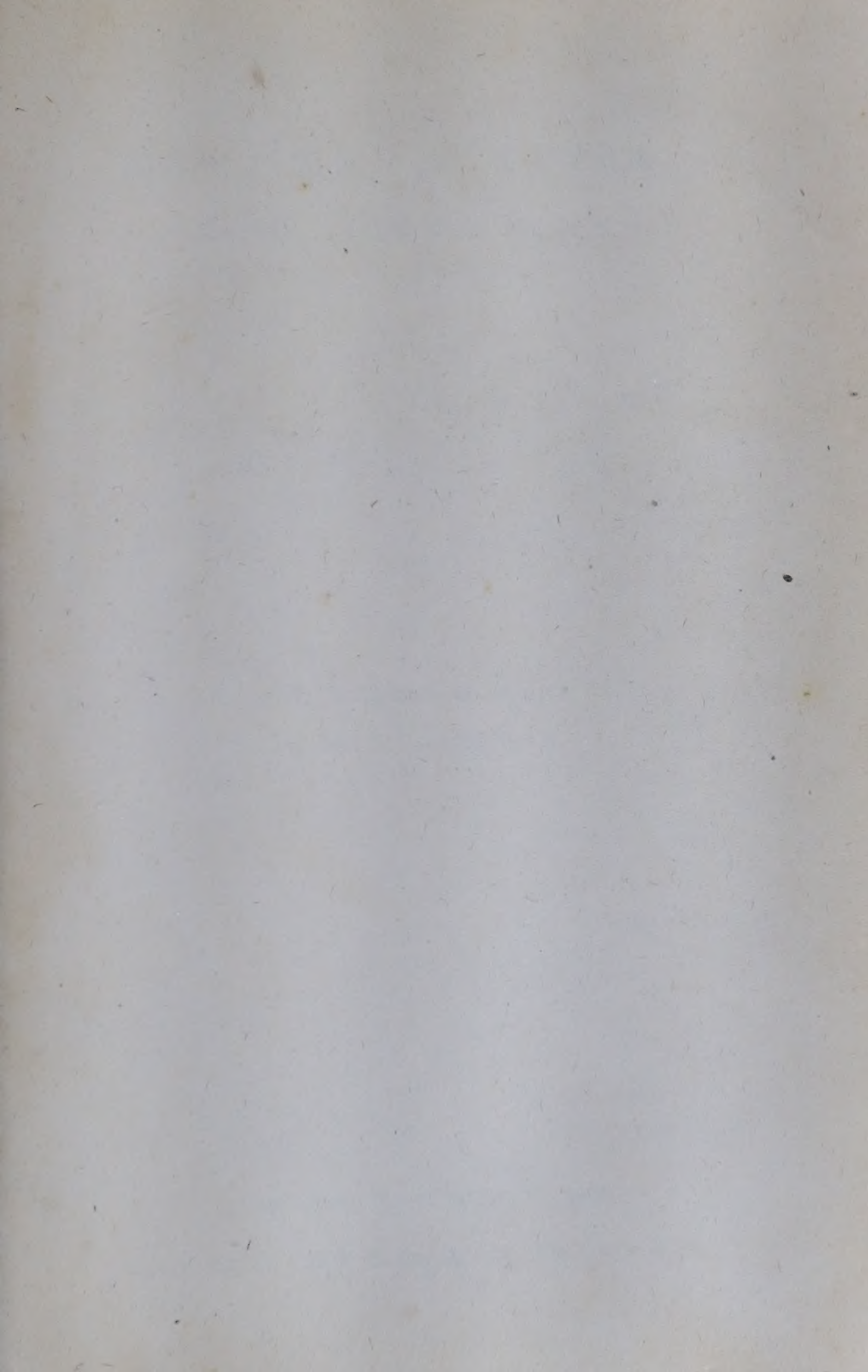
ಬೀಜಗಣಿತ

ಮೊದಲನೆಯ ಬಿ.ಎಸ್‌ಸಿ. ತರಗತಿ ಪಠ್ಯ ಪುಸ್ತಕ

ಸಿ. ಎನ್. ಶ್ರೀನಿವಾಸ ಅಯ್ಯಂಗಾರ್



ಪ್ರಕಟಣ ಮತ್ತು ಪ್ರಚಾರೋಪನ್ಯಾಸ ವಿಭಾಗ
ಬೆಂಗಳೂರು ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯ
ಬೆಂಗಳೂರು



ಬೀಜಗಣಿತ ALGEBRA

ಮೊದಲನೆಯ ಬಿ.ಎಸ್‌ಸಿ. ತರಗತಿ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ

Text Book for I Year B.Sc.

ಸಿ. ಎನ್. ಶ್ರೀನಿವಾಸ ಅಯ್ಯಂಗಾರ್

C. N. SRINIVASIENGAR

ಪ್ರಕಟಣ ಮತ್ತು ಪ್ರಚಾರೋಪನ್ಯಾಸ ವಿಭಾಗ

ಬೆಂಗಳೂರು ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯ, ಬೆಂಗಳೂರು

ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ 20

ಪ್ರಧಾನ ಸಂಪಾದಕರು: ಡಾ|| ರಂ. ಶ್ರೀ ಮುಗಳಿ

ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರ ಸಂಪಾದಕ ಸಮಿತಿ

ಪ್ರೊ|| ಎಫ್. ಜೆ. ನೊರೊನ್ಹ (ಅಧ್ಯಕ್ಷರು)

ಡಾ|| ಸಿ. ಎನ್. ಶ್ರೀನಿವಾಸ ಅಯ್ಯಂಗಾರ್

ಶ್ರೀ ಆರ್. ಗುರುರಾಜರಾವ್

ಶ್ರೀ ಜಿ. ಟಿ. ನಾರಾಯಣರಾವ್

ಶ್ರೀ ಹೆಚ್. ವಿ. ಸುಬ್ಬನರಸಿಂಹಯ್ಯ

ಬೆಲೆ : 5-00

ಮುದ್ರಣ : ಬೃಂದಾವನ್ ಪ್ರಿಂಟರ್ಸ್ ಅಂಡ್ ಪಬ್ಲಿಷರ್ಸ್, ಬೆಂಗಳೂರು-4

ಮುನ್ನುಡಿ

ಕನ್ನಡ ಮಾಧ್ಯಮದಲ್ಲಿ ಕಾಲೇಜು ಮಟ್ಟದ ವಿದ್ಯಾ ವ್ಯಾಸಂಗ ಮಾಡಬೇಕು ಎಂದು ಬಯಸುವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ತಕ್ಕ ಸೌಕರ್ಯಗಳನ್ನು ಒದಗಿಸಿಕೊಡಬೇಕು ; ಜೊತೆಯಲ್ಲಿಯೇ, ಉನ್ನತ ಮಟ್ಟದ ಜ್ಞಾನದಾನವು ಮಾತೃಭಾಷೆಯಲ್ಲಿಯೇ ನಡೆಯಲು ಸಮರ್ಪಕ ವಾತಾವರಣವನ್ನು ರಚಿಸಬೇಕು-ಇವೆರಡು ಉದ್ದೇಶಗಳನ್ನು ಲಕ್ಷದಲ್ಲಿಟ್ಟುಕೊಂಡು ಬೆಂಗಳೂರು ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯವು ಜನವರಿ 1967 ರಲ್ಲಿ ಒಂದು ನಿರ್ಧಾರವನ್ನು ಕೈಗೊಂಡಿತು. ಅದು ಅಖಿಲ ಭಾರತೀಯ ವಿದ್ಯಾಧೋರಣೆಗೆ ಅನುಸಾರವಾಗಿಯೂ ಇತ್ತು.

ಇದರ ಅಂಗವಾಗಿ, 1967–68 ರ ಪ್ರೀಯೂನಿವರ್ಸಿಟಿ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಐಚ್ಛಿಕವಾಗಿ ಕನ್ನಡ ಮಾಧ್ಯಮವನ್ನು ಸ್ವೀಕರಿಸುವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ, ಕನ್ನಡ ಮಾಧ್ಯಮದ ಒಂದು ವಿಭಾಗವನ್ನು ಪ್ರಾರಂಭಿಸಬಹುದೆಂದು ಕಾಲೇಜುಗಳಿಗೆ ಆದೇಶ ನೀಡಲಾಯಿತು. ಜೊತೆಯಲ್ಲಿಯೇ ಯೋಗ್ಯ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಗಳನ್ನು ಕನ್ನಡ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ ಒದಗಿಸಿಕೊಡುವ ಹೊಣೆಗಾರಿಕೆಯನ್ನು ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯವು ವಹಿಸಿಕೊಂಡಿತು. ಇದರ ನಿರ್ವಹಣೆಗಾಗಿ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯದ ಕನ್ನಡಪಠ್ಯ ಪುಸ್ತಕ ಸಮಿತಿಯು ರೂಪುಗೊಂಡಿತು. ಡಾ॥ ರಂ. ಶ್ರೀ. ಮುಗಳಿಯವರ ಅಧ್ಯಕ್ಷತೆಯಲ್ಲಿ ನೇಮಕವಾದ ಈ ಸಮಿತಿಯು ಹೊಸದಾರಿಯಲ್ಲಿ ಉತ್ಸಾಹದಿಂದ ನಡೆದು ಇದೀಗ ಹಲವಾರು ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಗಳನ್ನು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ವಿಷಯಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರಕಟಗೊಳಿಸುತ್ತಿದೆ.

ಇಂಥ ಒಂದು ಪವಿತ್ರ ಕಾರ್ಯದಲ್ಲಿ ಸಹಾಯಕವಾಗಿರುವ ಶಕ್ತಿಗಳು ಹಲವಾರು. ವಿವಿಧ ವಿಷಯಗಳ ಸಂಪಾದಕ ಮಂಡಳಿಗಳು, ಲೇಖಕರು, ಭಾಷಾತಜ್ಞರು, ಮುದ್ರಣಕಾರರು, ಮೊದಲಾದವರು; ಮತ್ತು ಇವರನ್ನೆಲ್ಲ ಒಂದುಗೂಡಿಸಿ ಕ್ಷಿಪ್ರವೇಳೆಯಲ್ಲಿ ಗುರಿಸಾಧಿಸಿರುವ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ಸಮಿತಿ; ಇವರೆಲ್ಲರಿಗೂ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯವು ಋಣಿಯಾಗಿದೆ; ಅವರ ವಿಶ್ವಾಸಪೂರ್ಣ ಸೇವೆಯನ್ನು ಮೆಚ್ಚಿಕೊಂಡಿದೆ.

ಕನ್ನಡ ಭಾಷೆ ಬೆಳೆಯದೇ ವಿಶ್ವದ ಆಧುನಿಕ, ವಿಶೇಷವಾಗಿ ವೈಜ್ಞಾನಿಕ, ಜ್ಞಾನವನ್ನು ಅದರಲ್ಲಿ ವಿವರಿಸುವುದು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ, ಸಾಕಷ್ಟು ಗ್ರಂಥಗಳು ಬರದೇ ಭಾಷೆ ಬೆಳೆಯುವಂತಿಲ್ಲ. ಈ ವಿಷವರ್ತುಲಭೇದನದ ದಾರಿ ಒಂದೇ-ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯವು ತಜ್ಞರ ನೆರವಿನಿಂದ ಗ್ರಂಥರಚನೆ ಪ್ರಾರಂಭಿಸಬೇಕು. ಮೊದಲ ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಎದುರಾಗುವ

ತೊಡರುಗಳು ಹಲವಾರು-ಕನ್ನಡದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಲ್ಲ ತಜ್ಞರು ಯಾರು ? ಪಾರಿಭಾಷಿಕ ಪದಗಳ ವಿಚಾರವೇನು ? ಯಾರಿಗಾಗಿ ಬರೆಯುವುದು ? ಈ ಪುಸ್ತಕಗಳ ಮಾರಾಟ ವಾದೀತೇ ? ಕನ್ನಡ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ಸಮಿತಿಯ ಪ್ರತ್ಯಕ್ಷಕಾರ್ಯವು ಇವೆಲ್ಲ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೂ ಸ್ವಲ್ಪವಂಟ್ಟಿಗಾದರೂ ಉತ್ತರ ನೀಡಿದೆ.

ಮುಂಬರುವ ದಿವಸಗಳಲ್ಲಿ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಗಳೂ, ಇತರ ಪುಸ್ತಕಗಳೂ ವಿಪುಳ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಪ್ರಕಟಿತವಾಗಿ ಕನ್ನಡದ ಸಜೀವ ಮಾಧ್ಯಮದ ಮೂಲಕ ಪ್ರಪಂಚದ ಅತ್ಯುತ್ತಮ ಜ್ಞಾನವು (ಅತ್ಯಾಧುನಿಕ ಜ್ಞಾನ ಸಹ) ಕನ್ನಡ ಮಕ್ಕಳಿಗೆ ದೊರೆಯುವು ದೆಂದು ಹಾರೈಸುತ್ತೇನೆ.

ಬೆಂಗಳೂರು ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯ
ಬೆಂಗಳೂರು

ವಿ. ಕೃ. ಗೋಕಾಕ್
ಉಪ ಕುಲಪತಿ

ನಾಲ್ಕು ಮಾತು

ಬೆಂಗಳೂರು ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯವು ವಿದ್ಯಾಭ್ಯಾಸದ ಮಾಧ್ಯಮದ ವಿಚಾರದಲ್ಲಿ ಕೂಲಂಕಷವಾಗಿ ಆಲೋಚಿಸಿ ಪ್ರಾದೇಶಿಕ ಭಾಷೆಯೇ ಉಚ್ಚ ವ್ಯಾಸಂಗದಲ್ಲಿಯೂ ಮಾಧ್ಯಮವಾಗಬೇಕೆಂಬ ತೀರ್ಮಾನಕ್ಕೆ ಬಂದಿತು. ಆದರೆ ಸದ್ಯದ ಪರಿಸ್ಥಿತಿಯಲ್ಲಿ ಅದನ್ನು ಐಚ್ಛಿಕವಾಗಿಡುವುದು ಯುಕ್ತ ಎಂಬ ನಿರ್ಣಯವನ್ನು ಅದು ಕೈಗೊಂಡು ಕನ್ನಡ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ರಚನೆ ಮತ್ತು ಪ್ರಕಟಣೆಗಳಿಗೆ ಕನ್ನಡ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ಸಮಿತಿ ಒಂದನ್ನು ನೇಮಕ ಮಾಡಿರುತ್ತದೆ. ಈ ಸಮಿತಿಯು ಪರವಾಗಿ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ವಿಷಯ ಗಳನ್ನು ಕುರಿತು ಕನ್ನಡದಲ್ಲಿ ಪುಸ್ತಕಗಳನ್ನು ಬರೆಯುವದಕ್ಕೆಂದು ಅನುಭವಿಕರಾದ ಅಧ್ಯಾಪಕರನ್ನು ಕೇಳಿಕೊಳ್ಳಲಾಯಿತು. ಆಯಾ ವಿಷಯಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಪಟ್ಟ ಪಠ್ಯ ಸಮಿತಿಯ ಸದಸ್ಯರಾಗಲಿ, ಪಠ್ಯಸಮಿತಿ ಗೊತ್ತುಪಡಿಸಿದ ಸಂಪಾದಕ ಸಮಿತಿಯ ಅಧ್ಯಕ್ಷ ರಾಗಲಿ, ಸದಸ್ಯರಾಗಲಿ, ಲೇಖಕರಿಂದ ಬರುವ ಹಸ್ತಪ್ರತಿಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಬೇಕೆಂದು ಬಿನ್ನವಿಸಲಾಯಿತು. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಹಸ್ತಪ್ರತಿಯನ್ನೂ ಭಾಷಾ ತಜ್ಞರಿಂದ ನೋಡಿಸ ಬೇಕೆಂದೂ ಗೊತ್ತಾಯಿತು. ಈ ಎಲ್ಲ ಬಗೆಯ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಗೆ ಒಳಪಟ್ಟು ಸಾಧ್ಯವಾದಷ್ಟು ಪರಿಪೂರ್ಣವೂ ನಿರ್ದುಷ್ಟವೂ ಆದ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕವು ರಚಿತವಾಗಬೇಕೆಂದೂ ಅದ್ದು ಸೊಗಸಾಗಿ ಮುದ್ರಿತವಾಗಬೇಕೆಂದೂ ಕನ್ನಡ ಪಠ್ಯಸಮಿತಿ ಪ್ರಾಮಾಣಿಕ ಪ್ರಯತ್ನ ಗಳನ್ನು ಮಾಡುತ್ತಿದೆ. ಪಠ್ಯವೆಂಬ ದೃಷ್ಟಿಯಿಂದ ಮಾತ್ರವಲ್ಲ—ಕನ್ನಡ ಜನಕ್ಕೆ ಕನ್ನಡದಲ್ಲಿಯೇ ಉತ್ತಮ ಜ್ಞಾನವು ಉಪಲಬ್ಧವಾಗಲಿ ಎಂಬ ವ್ಯಾಪಕವಾದ ಉದ್ದೇಶವೂ ಈ ಮಹಾಕಾರ್ಯದ ಹಿನ್ನೆಲೆಯಲ್ಲಿದೆ.

ಈ ಕಾರ್ಯವು ಎಷ್ಟು ಯಶಸ್ವಿಯಾಗುವುದೋ ಅಷ್ಟು ವೇಗದಿಂದ ಐಚ್ಛಿಕವಾದ ಮಾಧ್ಯಮವು ಸಾರ್ವತ್ರಿಕವಾಗುತ್ತದೆ. ಕಡ್ಡಾಯವಾದ ಮಾಧ್ಯಮ ಎನಿಸಿಕೊಳ್ಳದೆ ಕಡ್ಡಾಯವಾಗಿ ಅದನ್ನೇ ಸ್ವೀಕರಿಸಬೇಕು ಎಂಬ ಇಚ್ಛೆಯನ್ನು ನಿರ್ಮಾಣಮಾಡುತ್ತದೆ. ಮಾಧ್ಯಮದ ವಿಚಾರವಾಗಿ ನಮ್ಮ ದೇಶದಲ್ಲಿ ಅನೇಕ ಬಗೆಯ ಸಾಧಕ ಬಾಧಕ ಚರ್ಚೆ ನಡೆದಿದೆ. ಮುಖ್ಯವಾಗಿ ಜ್ಞಾನದ ಆಕಲನ ಮತ್ತು ಅಭಿವ್ಯಕ್ತಿ ಇವೆರಡು ಕ್ರಿಯೆ ಗಳಿಗೆ ಸಾಮಾನ್ಯ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ ಮತ್ತು ಸಾಮಾನ್ಯ ನಾಗರಿಕ ಇವರ ದಾರಿಯಲ್ಲಿ ಪರಕೀಯ ಭಾಷೆಯ ಅಡ್ಡಿ ಆತಂಕಗಳನ್ನು ಒಡ್ಡದೆ ಅವರವರ ಸ್ವಂತ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ

ಜ್ಞಾನಸಾಮಗ್ರಿಯನ್ನು ಒದಗಿಸಿದರೆ ಮಾತ್ರ ಪ್ರಜಾಪ್ರಭುತ್ವ ಸಾರ್ಥಕವಾಗುತ್ತದೆ. ನಿರ್ಮಾಣಶೀಲವಾದ ವಿಚಾರವಂತಿಕೆ ಮತ್ತು ಮುಕ್ತ ರೀತಿಯ ಅಭಿವ್ಯಕ್ತಿ ಇವುಗಳಿಗೆ ಅವಕಾಶ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ಈ ದೃಷ್ಟಿಯನ್ನು ಇಟ್ಟುಕೊಂಡು ಕನ್ನಡ ಪಠ್ಯಸಮಿತಿ ನಿಷ್ಠೆಯಿಂದ ಕಾರ್ಯಪ್ರವೃತ್ತವಾಗಿದೆ.

ಈ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ಯೋಜನೆಗೆ ರೂಪಕೊಟ್ಟು ಅದನ್ನು ಕಾರ್ಯಗತ ಮಾಡುವ ದಿಶೆಯಲ್ಲಿ ಸೂಕ್ತ ಕ್ರಮಗಳನ್ನು ಕೈಕೊಂಡು ಕನ್ನಡ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ಸಮಿತಿಗೆ ಎಲ್ಲ ಬಗೆಯ ಮಾರ್ಗದರ್ಶನ ಮಾಡುತ್ತಿರುವ ಮತ್ತು ಈ ಪುಸ್ತಕಕ್ಕೆ ಮುನ್ನುಡಿ ಒರೆದಿರುವ ಬೆಂಗಳೂರು ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯದ ಉಪಕುಲಪತಿ ಅವರಿಗೆ ನಮ್ಮ ಹೃತ್ಪೂರ್ವಕ ವಂದನೆಗಳು. ನಮ್ಮ ಕಾರ್ಯದಲ್ಲಿ ಸರ್ವ ವಿಧವಾದ ನೆರವನ್ನು ನೀಡುತ್ತಿರುವ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯದ ರಿಜಿಸ್ಟ್ರರ್ ಅವರಿಗೂ ನಮ್ಮ ಹಾರ್ದಿಕ ಧನ್ಯವಾದಗಳು.

ಬೀಜಗಣಿತದ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕವನ್ನು ಬರೆದುಕೊಟ್ಟ ಡಾ॥ ಸಿ. ಎನ್. ಶ್ರೀನಿವಾಸ ಅಯ್ಯಂಗಾರ್ ಅವರಿಗೂ ಮತ್ತು ಇದನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ ಮುದ್ರಣಕ್ಕೆ ಶಿಫಾರಸ್ಸು ಮಾಡಿದ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರ ಸಂಪಾದಕ ಸಮಿತಿಯ ಅಧ್ಯಕ್ಷ ಪ್ರೊ॥ ಎಫ್. ಜೆ. ನೊರೊನ್ನ ಅವರಿಗೂ ವಂದನೆಗಳು. ಪುಸ್ತಕವನ್ನು ಅಂದವಾಗಿ ಮುದ್ರಿಸಿಕೊಟ್ಟ ಬೃಂದಾವನ್ ಪ್ರಿಂಟರ್ಸ್ ಮತ್ತು ಪಬ್ಲಿಷರ್ಸ್ ಅವರಿಗೆ ನಮ್ಮ ವಂದನೆಗಳು ಸಲ್ಲುತ್ತವೆ.

ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ಪ್ರಕಟಣ ಕಾರ್ಯದಲ್ಲಿ ನಿತಾಂತ ಉತ್ಸಾಹದಿಂದ ಕಾರ್ಯ ನಿರ್ವಹಿಸುತ್ತಿರುವ ಶ್ರೀ ಕೆ. ಸಿ. ಶಿವಪ್ಪನವರಿಗೆ ನನ್ನ ಹಾರ್ದಿಕ ಧನ್ಯವಾದಗಳು.

ರಂ. ಶ್ರೀ ಮುಗಳಿ
ಪ್ರಧಾದ ಸಂಪಾದಕ
ಕನ್ನಡ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ಸಮಿತಿ

ಪೀಠಿಕೆ

ಬೆಂಗಳೂರು, ಮೈಸೂರು ಮತ್ತು ಕರ್ಣಾಟಕ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯಗಳ ಮೊದಲನೆಯ ಬಿ. ಎಸ್‌ಸಿ. ತರಗತಿಗೆ ವಿಧಿಸಿರುವ ನೂತನ ಪಾಠಾವಳಿಯನ್ನನುಸರಿಸಿ ಈ ಪಠ್ಯ ಪುಸ್ತಕವನ್ನು ಬರೆಯುವಂತೆ ನನಗೆ ಆಹ್ವಾನವಿತ್ತುದು ನನಗೆ ತೋರಿಸಿದ ಸನ್ಮಾನವೆಂದು ಭಾವಿಸುತ್ತೇನೆ. ಪಾಠಾವಳಿಯ ವಿಹಂಗಮ ದೃಷ್ಟಿಯಿಂದ, ಇದುವರೆಗೂ ಹತ್ತಾರು ವರ್ಷಗಳಿಂದ ಬಳಕೆಯಲ್ಲಿದ್ದ ಪಾಠಾವಳಿಯು ಸಂಪೂರ್ಣವಾಗಿ ಮಾರ್ಪಟ್ಟಿರುವುದು ವ್ಯಕ್ತವಾಗುತ್ತದೆ. ಆಧುನಿಕ ಗಣಿತದ ಸರಣಿಯನ್ನೂ ಇತರ ದೇಶಗಳಲ್ಲಿ ಬಳಕೆಗೆ ಬಂದಿರುವ ಪಠ್ಯ ವಿಧಾನಗಳನ್ನೂ ಅನುಸರಿಸಿ ಈ ನೂತನ ಪಾಠಾವಳಿಯು ಭಾರತದ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯಗಳಲ್ಲಿ ಜಾರಿಗೆ ಬರುತ್ತಿದೆ. ಗಣಸಿದ್ಧಾಂತ, ಸಂಖ್ಯಾವ್ಯೂಹಗಳು ಮೊದಲಾದ ಅನೇಕ ವಿಷಯಗಳನ್ನು ನಮ್ಮ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯಗಳಲ್ಲಿ ಈಗತಾನೆ ಬೋಧಿಸಲು ಆರಂಭಿಸಿರುವರು. ಈ ವಿಷಯಗಳನ್ನೂ ಹೀಗೆಯೇ ಕೋಶಗಳು ಸರಳಸಮೀಕರಣಗಳು ಎಂಬ ವಿಷಯಗಳನ್ನೂ ಕುರಿತ ಮಟ್ಟಕ್ಕೆ ಅನ್ವಯಿಸುವಂತೆ ಪಠ್ಯಗ್ರಂಥವನ್ನು ರಚಿಸುವುದು ಅಧಿಕವಾದ ಅಂಕುರಾರ್ಪಣ್ಯ ಕಾರ್ಯವನ್ನೂ ವಸ್ತುನಿರ್ಣಯ ಮತ್ತು ಜೋಡಣೆಗಳಲ್ಲಿ ವಿವೇಚನೆಯನ್ನೂ ಒಳಗೊಳ್ಳುತ್ತದೆ. ಪಾಠಾವಳಿಯ ಭಾಷೆಯು ಬಹುಸಂಕ್ಷಿಪ್ತವಾಗಿರುವುದಾಗಿ, ವಿಷಯಗಳನ್ನು ಆರಿಸಿಕೊಳ್ಳುವುದರಲ್ಲಿ ಅಧಿಕವಾದ ವಿವೇಚನಾ ಕಾರ್ಯವು ಬಂದೊದಗಿತು. ನಾಲ್ವತ್ತು ವರ್ಷಗಳಿಗೆ ಮೇಲ್ಪಟ್ಟು ನಾನಾ ಮಟ್ಟಗಳಿಗೂ ನಾನಾತರದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೂ ಶಿಕ್ಷಕನಾಗಿದ್ದ ಅನುಭವದ ಸಹಾಯವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡಿರುವೆನು ಇಂಥ ಪುಸ್ತಕವು ಭಾರತದಲ್ಲಿ ಪ್ರಕಟಿತವಾಗುವುದು ಇದೇ ಪ್ರಪ್ರಥಮವಿರಬಹುದು, ಆದರೆ ಶಿಕ್ಷಕರಿಗೂ ಶಿಷ್ಯರಿಗೂ ಗ್ರಾಹ್ಯವಾಗಿ ಆನಂದದಾಯಕವಾಗಿರಬಹುದು ಎಂದು ಎಣಿಸುತ್ತೇನೆ. ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗೆ ಉಪಯುಕ್ತವಾದ ಗಣಿತ ಜ್ಞಾನದ ಒಂದು ಪದರವನ್ನು ಈ ಗ್ರಂಥವು ಕೊಟ್ಟೀತು ಎಂದೂ ಇದನ್ನು ಹೆಚ್ಚು ಶ್ರಮವಿಲ್ಲದೆ ಸಮಾಧಾನದಿಂದ ಆತನು ಗ್ರಹಿಸಿಕೊಳ್ಳುವನು ಎಂದೂ ಆಶಿಸುತ್ತೇನೆ.

ಮೊದಲು ಐದು ಅಧ್ಯಾಯಗಳಾದ ಗಣಸಿದ್ಧಾಂತ ಮತ್ತು ಸಂಖ್ಯಾವ್ಯೂಹಗಳ ವಸ್ತು ವಿಷಯವನ್ನು ಮುಂದಿನ ಪುಟದಲ್ಲಿ ಸೂಚಿಸಿರುವ ಗ್ರಂಥಗಳಿಂದ ಪಡೆಯಲಾಗಿದೆ.

W. E. Deskins: Abstract Algebra (Allendoerfer Advanced Series)

G. Birkhoff S. MacLane: A Survey of Modern Algebra (MacMillan Co, New York)

J. L. Kelly: Introduction to Modern Algebra (D.Van Nostrand Co, Princeton)

E.G.H. Landau: Foundations of Analysis: The arithmetic of whole, rational, irrational & complex numbers (Chelsea Publishing Co.)

ಮತ್ತು ಇನ್ನೂ ಒಂದೆರಡು ಗ್ರಂಥಗಳು. ಉಳಿದ ವಿಷಯಗಳೆಲ್ಲಾ ಒಂದು ಸಾಮಾನ್ಯ ರೂಪಕ್ಕೆ ಬಂದಿವೆಯಾಗಿ ಯಾವತರದ ಆಭಾರ ಮನ್ನಣೆಯ ಆವಶ್ಯಕತೆಯೂ ಕಾಣುವುದಿಲ್ಲ. ಆದರೆ ಕೆಳಮಟ್ಟಗಳಿಗೆ ದೊರಕುವಂತಹ ಕೋಶಗಳ ಒಂದು ಕ್ರಮಗತವಾದ ನಿರೂಪಣೆ ಎಲ್ಲಿಯೂ ಅಚ್ಚಾಗಿಲ್ಲ. ಸರಳ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸುವ ವಿಚಾರವನ್ನು ತಿಳಿಸುವಾಗ ಈ ತೊಂದರೆ ಕಂಡುಬಂತು. ಈ ಗ್ರಂಥದ ಮಟ್ಟದೊಳಗೆ ಅಡಕವಾಗುವಂತೆ ಈ ವಿಷಯಕ್ಕೆ ಸಂಪೂರ್ಣವೂ ನಿಖರವೂ ಆದ ವಿವರಣೆ ಸಾಧ್ಯವಾಗದು. ಇಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ವಿವರಣೆ ಸ್ವಲ್ಪಮಟ್ಟಿಗೆ ಅಪೂರ್ಣವಾಗಿರುವುದಾದರೂ ವಿಷಯದ ಒಂದು ಸಮಗ್ರ ಚಿತ್ರವನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದೆಯೆಂದು ನಂಬುತ್ತೇನೆ. ಕುರಿತ ಮಟ್ಟದೊಳಗೆ ಸಾಧ್ಯವಾದುದನ್ನು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ ಎಂದು ಕೊಂಡಿದ್ದೇನೆ.

ಕನ್ನಡದ ಬಗ್ಗೆ ಒಂದು ಮಾತು. ವಿಜ್ಞಾನ ಕನ್ನಡದ ಬಗ್ಗೆ ಎಲ್ಲರೂ ಕಂಡು ಅನುಭವಿಸುತ್ತಿರುವ ಮಾತು. ಇಂಥ ಗ್ರಂಥವನ್ನು ಬರೆಯುವ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ, ಅನೇಕ ಪದಗಳಿಗೆ ಕನ್ನಡಪದಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿಸಿಕೊಳ್ಳಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. Isomorphism, matrix, linear dependence ಮುಂತಾದ ಅನೇಕ ಪದಗಳಿಗೆ ನನಗೆ ತೋರಿದಂತೆ ಕನ್ನಡ ಪದಗಳನ್ನು ಕಲ್ಪಿಸಿಕೊಂಡಿದ್ದೇನೆ. ಈ ಕಾರ್ಯದಲ್ಲಿ ತೀವ್ರ ಭಿನ್ನಾಭಿಪ್ರಾಯಗಳು, ವೈಮನಸ್ಯವು ಏರುವಷ್ಟುಮಟ್ಟಿಗೆ ಹಿಂದೆ ಉಂಟಾಗಿದ್ದ ಕಹಿನೆನಪುಗಳು ನನಗಿವೆ. ಇಷ್ಟು ಮಾತ್ರ ಹೇಳಬಯಸುತ್ತೇನೆ. ವಿಜ್ಞಾನ ಗ್ರಂಥಗಳನು ಬರೆಯುತ್ತಿರುವ ಈ ಆರಂಭದ ಮಟ್ಟದಲ್ಲಿ, ಹೀಗೆ ಪದಗಳನ್ನು ಕಲ್ಪಿಸಿಕೊಳ್ಳುವ ಹಕ್ಕು ಆಯಾಗ್ರಂಥಕರ್ತನದು. ನಾಲ್ವರು ಕಲೆತು ಒಮ್ಮತಕ್ಕೆ ಬರುವ ಅವಕಾಶವಿದ್ದರೆ, ಒಳ್ಳೆಯದು. ಅದಿಲ್ಲದಿರುವಾಗ, ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಗ್ರಂಥಕರ್ತರು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಪದಗಳನ್ನು ಅವರಿಗೆ ತೋಚಿದಂತೆ ಉಪಯೋಗಿಸುವುದು ಅನಿವಾರ್ಯ. ಕಾಲಕ್ರಮದಲ್ಲಿ,

ಪುಸ್ತಕಗಳ ಬಳಕೆಗೆ ಅವಕಾಶ ದೊರೆತಂತೆಲ್ಲಾ, ಕೆಲವು ಪದಗಳು, ಅವು ಉತ್ತಮವಲ್ಲದಿದ್ದರೂ, ಉಳಿಯುವುವು, ಇನ್ನು ಕೆಲವು ಅಳಿಯುವುವು. ಈ ಮಾತು ಎಲ್ಲ ಭಾಷೆಗಳ ವಿಜ್ಞಾನ ಪದಭಂಡಾರಕ್ಕೂ ನಿಜವಿರಬಹುದು.

ಬೆಂಗಳೂರು ವಿಶ್ವ ವಿದ್ಯಾಲಯದ ಗಣಿತ ಶಾಖೆಯ ಮುಖ್ಯ ಪ್ರಾಧ್ಯಾಪಕರಾದ ಪ್ರೊ॥ ಎಫ್. ಜೆ. ನೊರೋನ್ಹಾ ಅವರೂ ಶಾಖೆಯಲ್ಲಿ ಅವರ ಸಹೋದ್ಯೋಗಿಗಳೂ ಎಲ್ಲರೂ ನನ್ನನ್ನು ಅತ್ಯಂತ ವಿನಯ ಗೌರವಗಳಿಂದ ಕಂಡುಕೊಂಡಿರುತ್ತಾರೆ. ಅವರಿಗೆಲ್ಲಾ ನನ್ನ ಒಲವಿನ ಸಂತೋಷವನ್ನು ಈ ಮೂಲಕ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸುತ್ತೇನೆ.

ಸಿ. ಎನ್. ಶ್ರೀನಿವಾಸ ಅಯ್ಯಂಗಾರ್

ಪ ರಿ ವಿ ಡಿ

Contents

Preface

I deem it a privilege and an honour to have been invited to write this text book covering the new syllabus prescribed for the I Year B.Sc. of the Bangalore, Mysore and Karnatak Universities. A glance at the syllabus will reveal that the syllabus that was in vogue for several decades has been completely altered, so as to fall in line with modern trends in mathematics, and the methods of teaching that have come to vogue in other countries. Many topics, specially Set Theory and the Number Systems are being taught for the first time in our Universities. Preparation of a text-book to cover these topics, and also an account of matrices and linear equations, in a way to suit the standard for which these are to be taught, has required a lot of pioneering work and considerable thought in the selection and arrangement of the material. The extreme brevity of wordings in the syllabus has made me to draw upon my discretion with great care in the selection of the topics to be included, and my experience as a teacher of varied standards and different strata of students, over four decades has, I believe, stood me in great stead. It is my earnest hope that the book, which is probably a pioneer in its field in India, will be found readable and enjoyable by the teacher as well as by the taught, and that it gives to the student a useful quantum of knowledge which he can assimilate with comfort and without undue strain.

The sources from which the material of the first five chapters, comprising Set Theory and Number Systems, has been drawn are:

W. E. DESKINS : Abstract Algebra (Allendoerfer Advanced Series)

G. BIRKHOFF S. MACLANE : A Survey of Modern Algebra (MacMillan Co, New York)

J. L. KELLEY : Introduction to Modern Algebra (D. Van Nostrand Co., Princeton)

E. G. H. LANDAU: Foundations of Analysis: The arithmetic of whole, rational, irrational & complex numbers, (Chelsea Publishing Co.)

and one or two others. The other topics have all been standardised and no particular acknowledgements are called for. But a routinised treatment of matrices is still not available, to suit lower standards. The author felt this difficulty while giving an account of the solution of linear equations. A full rigorous treatment is impossible within the scope of the prescribed standard. The exposition that has been given here, while somewhat incomplete, gives a succinct account of the subject, and is probably the best that could be done within the standard prescribed.

It is with pleasure that I record the very kind and courteous treatment accorded to me, all through, by Prof. F. J. Noronha, Head of the Department of Mathematics, Bangalore University, and by all his colleagues in the Department.

C. N. SRINIVASIENGAR
Formerly Professor of Mathematics
at Mysore and Karnatak Universities

ಬೀಜಗಣಿತ

ALGEBRA

ಬೀಜಗಣಿತ

CHAPTER 1

Theory of Sets

1·1 In the study of any science wherein the facts have to be examined and subjected to our logical frame of mind, it becomes necessary to start with a few fundamental concepts and terms. It is possible to describe the concept of God by His powers and qualities, but we cannot define God as we can define a friend of ours or an article in our house. Time can be measured, but it is not possible to answer the question, "What is time?" No strict definitions can be given to terms like "point", "line", "plane" that occur in mathematics. It is customary to explain a point as having no length, no breadth and no height, and a line as having length but not breadth or height. But then the questions arise: What is length, what is breadth?

Therefore, when we commence a logical study of mathematics, we have got to agree to certain terms or notions as *undefinable*, and describe their qualities after associating with them certain axioms. We then logically work out the properties or theorems that follow from these qualities. In this way, mathematics develops.

The word *Set* is one such term. Alternate terms, equally undefinable, are group, collection, aggregate. A collection of things is a set. The things may be of any kind. They may be numbers of mathematics, points on a line, the people of a town, or the leaves of a book. The things in a set are called the *elements* of the set. If a is an element of a set A, we write $a \in A$. We read this as "a is an element of A, or a belongs to A". If a is not an element of A, we write $a \notin A$.

ಅಧ್ಯಾಯ 1

ಗಣ ಸಿದ್ಧಾಂತ

1.1 ನಮ್ಮ ತಾರ್ಕಿಕ ಬುದ್ಧಿಶಕ್ತಿಗೆ ಹೊಂದಿಕೊಳ್ಳುತ್ತಾ ವಿಚಾರಗಳನ್ನು ಅವಲೋಕಿಸಿ ಅಭ್ಯಸಿಸುವ ಯಾವುದೇ ಶಾಸ್ತ್ರವನ್ನೂ ಕೆಲವು ಮೂಲಭೂತವಾದ ಭಾವನೆಗಳಿಂದ ಅಥವಾ ಪದಗಳಿಂದ ಆರಂಭಿಸಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ದೇವರು ಎಂಬ ಭಾವನೆಯನ್ನು ಆತನ ಮಹಿಮೆಗಳಿಂದ, ಆತನ ಗುಣಗಳಿಂದ ವರ್ಣಿಸಲು ಸಾಧ್ಯ. ಆದರೆ ನಮ್ಮ ಮಿತ್ರನೊಬ್ಬನನ್ನು ಅಥವಾ ನಮ್ಮ ಮನೆಯಲ್ಲಿರುವ ವಸ್ತುವೊಂದನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯೆಮಾಡಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗುವಂತೆ ದೇವರನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯೆಮಾಡಲು ಆಗುವುದಿಲ್ಲ. ಕಾಲವನ್ನು ಅಳೆಯಬಹುದು, ಆದರೆ ಕಾಲವೆಂದರೇನು ಎಂಬ ಪ್ರಶ್ನೆಗೆ ಉತ್ತರಿಸಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಬಿಂದು, ರೇಖೆ, ತಳ ಮುಂತಾದ ಪದಗಳಿಗೆ ವ್ಯಾಖ್ಯೆ ದೊರಕಲಾಗದು. ಬಿಂದುವಿಗೆ "ಉದ್ದವಿಲ್ಲ, ಅಗಲವಿಲ್ಲ, ಎತ್ತರವಿಲ್ಲ," ರೇಖೆಗೆ "ಉದ್ದವಿದೆ, ಅಗಲವಿಲ್ಲ, ದಪ್ಪವಿಲ್ಲ" ಎಂದು ಹೇಳುವುದುಂಟು. ಆದರೆ ಉದ್ದ ಎಂದರೇನು, ಅಗಲ ಎಂದರೇನು ಎಂಬ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು ಏಳುತ್ತವೆ.

ಆದಕಾರಣ, ಗಣಿತವನ್ನು ತರ್ಕಯುತವಾಗಿ ಅಭ್ಯಾಸಮಾಡಲು ಆರಂಭಿಸುವಾಗ ಕೆಲವು ಪದ ಅಥವಾ ಭಾವನೆಗಳನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಲಾಗದವೆಂದು ಒಪ್ಪಿಕೊಂಡು, ಕೆಲವು ಮೂಲಭಾವನೆಗಳನ್ನು ಇವಕ್ಕೆ ಅನ್ವಯಿಸಿ ಇವುಗಳ ಗುಣಗಳನ್ನು ವರ್ಣಿಸುತ್ತೇವೆ. ಈ ಗುಣಗಳಿಂದ ಉಂಟಾಗುವ ಗುಣಗಳನ್ನು ಅಥವಾ ಪ್ರಮೇಯಗಳನ್ನು ತರ್ಕದಿಂದ ಸಾಧಿಸುತ್ತೇವೆ. ಹೀಗೆ ಗಣಿತ ಬೆಳೆಯುತ್ತದೆ.

ಗಣ ಎಂಬುದು ಇಂಥದೊಂದು ಪದ. ಸಮೂಹ, ಗುಂಪು, ಶೇಖರಣೆ ಇತ್ಯಾದಿ ಪದಗಳನ್ನೂ ಗಣಕ್ಕೆ ಬದಲಾಗಿ ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು. ಕೆಲವು ವಸ್ತುಗಳ ಸಮುದಾಯಕ್ಕೆ ಒಂದು ಗಣವೆಂದು ಹೆಸರು. ಈ ವಸ್ತುಗಳು ಎಂಥವೇ ಆಗಿರಬಹುದು ; ಗಣಿತದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರಬಹುದು, ರೇಖೆಯ ಮೇಲಣ ಬಿಂದುಗಳಾಗಿರಬಹುದು, ಊರಿನಲ್ಲಿರುವ ಜನಗಳಾಗಿರಬಹುದು, ಪುಸ್ತಕದ ಹಾಳೆಗಳಾಗಿರಬಹುದು. ಗಣದಲ್ಲಿರುವ ವಸ್ತುಗಳಿಗೆ ಅದರ ಗಣಾಂಶಗಳು ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

A ಎಂಬುದು ಒಂದು ಗಣ, a ಅದರ ಒಂದು ಗಣಾಂಶವಾದರೆ, $a \in A$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. a ಯು A ನಲ್ಲಿ ಅಡಕವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಓದಬಹುದು. a ಯು A ಯ ಗಣಾಂಶವಲ್ಲದಿದ್ದರೆ, $a \notin A$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

A set is usually denoted in one of two ways:

(i) **The tabular method.** In this, *all* the elements of the set are written out inside a flower bracket.

Ex:

$$A = \{ 1, 2, 3, 8, 14, 16, 19 \}$$

$$B = \{ 1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{3}{4}, \tfrac{4}{5}, \tfrac{5}{6}, \ldots\ldots\ldots \}$$

(ii) **The Rule Method.** In this the set is described by the property or properties possessed by its elements.

Ex: In the set B above, all the numbers following 1 have their numerator one less than the denominator. Therefore we can describe B as

$$B = \left\{ b \mid b = 1, \text{ or else } b = \frac{p}{p+1}, \text{ where } p \text{ is a positive integer} \right\}$$

The tabular method may not be possible in all cases. For example, if A is the set of all people in Bangalore, it will be a very difficult task to write down the names of all the people in the table. We can only describe A as

$$A = \{ a \mid a \text{ is a person in Bangalore} \}$$

Similarly, the set

$$a = \{ P \mid P \text{ is a point on a line } l \}$$

cannot be described by the tabular method.

In like manner, sets may exist which are not adaptable to the Rule Method. For instance, the set A in (i).

If it is possible to count the number of elements in a set, it is a *finite* set, otherwise it is an *infinite* set. The set of leaves in your book is a finite set, the set of people in Bangalore is a finite set, but the set of points on a line of length one inch is infinite.

ಗಣವನ್ನು ಹೆಸರಿಸಲು ಎರಡು ವಿಧಾನಗಳು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಬಳಕೆಯಲ್ಲಿವೆ :

(i) **ಪಟ್ಟಿವಿಧಾನ.** ಇಲ್ಲಿ ಗಣಾಂಶಗಳನ್ನೆಲ್ಲ ಒಂದು ಪುಷ್ಪಾವರಣದಲ್ಲಿ ಬರೆದು ತಿಳಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾ : $A = \{1, 2, 3, 8, 14, 16, 19,\}$

$B = \{1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \ldots\ldots\}$

(ii) **ಗುಣವಿಧಾನ.** ಗಣಾಂಶಗಳ ಗುಣದಿಂದ ಅಥವಾ ಗುಣಗಳಿಂದ ಗಣವನ್ನು ವಿವರಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾ : ಮೇಲಿನ B ಗಣದಲ್ಲಿ 1ರ ಮುಂದಿನ ಎಲ್ಲ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿಯೂ ಅಂಶವು ಛೇದಕ್ಕಿಂತ ಒಂದು ಕಡಮೆ. ಆದ್ದರಿಂದ

$B = \{ b \mid b = 1,$ ಇಲ್ಲವೇ $b = \frac{p}{p+1}, p$ ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕ $\}$

ಎಂದು ತಿಳಿಸಬಹುದು.

ಪಟ್ಟಿ ವಿಧಾನವು ಎಲ್ಲ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿಯೂ ಸಾಧ್ಯವಾಗದೆ ಇರಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ A = ಬೆಂಗಳೂರಿನಲ್ಲಿರುವ ಜನರ ಗಣ. ಎಲ್ಲ ಜನರ ಹೆಸರುಗಳನ್ನೂ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ಬರೆಯುವುದು ಕಷ್ಟ.

$A = \{ a \mid a$ ಎಂಬಾತ ಬೆಂಗಳೂರಲ್ಲಿರುವ ಒಬ್ಬ ಮನುಷ್ಯ $\}$

ಎಂದು ಮಾತ್ರ ತಿಳಿಸಬಹುದು.

ಹೀಗೆಯೇ $a = \{ P \mid P$ ಎಂಬುದು l ರೇಖೆಯಮೇಲಿರುವ ಒಂದು ಬಿಂದು$\}$ ಎಂಬುದೊಂದು ಗಣ. ಪಟ್ಟಿವಿಧಾನದಿಂದ ಇದನ್ನು ತಿಳಿಸಲು ಆಗದು.

ಇದರಂತೆಯೇ, ಗುಣವಿಧಾನಕ್ಕೆ ಅಳವಡಿಸಲಾಗದ ಗಣಗಳಿರಬಹುದು.

ಉದಾ : (i) ರಲ್ಲಿರುವ A ಗಣ.

ಒಂದು ಗಣದಲ್ಲಿರುವ ಗಣಾಂಶಗಳನ್ನು ಎಣಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಾದರೆ, ಅದು ಪರ್ಯಾಪ್ತಗಣ, ಇಲ್ಲದಿದ್ದರೆ ಅಪರ್ಯಾಪ್ತ ಅಥವಾ ಅನಂತ. ನಿಮ್ಮಲ್ಲಿರುವ ಪುಸ್ತಕಗಳ ಗಣ ಪರ್ಯಾಪ್ತ, ಬೆಂಗಳೂರಲ್ಲಿರುವ ಜನಗಳ ಗಣ ಪರ್ಯಾಪ್ತ, ಒಂದಂಗುಲ ಉದ್ದವಿರುವ ರೇಖೆಯ ಮೇಲಣ ಬಿಂದುಗಳ ಗಣ ಅಪರ್ಯಾಪ್ತ.

We also consider the possibility of there being no elements at all in a set. Such a set is called a *null set*, and will be found useful as we proceed. Examples: The set of students in the college who are ten feet tall, the set of all plane triangles the sum of whose angles is 200°. The null set is denoted by the symbol ϕ.

1·2 Subsets. If all the elements of a set A are contained in another set B, we call A a subset of B. We write this as $A \subset B$ (read: A is contained in B), or as $B \supset A$* (read: B contains A).

According to this definition, every set is its own subset. For future convenience, we regard the null set as a subset of every set.

Ex: The set $E = \{2, 4, 6, \ldots\ldots\}$ of even numbers is a subset of the set $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\ldots\}$ of all natural numbers. $E \subset N$, or $N \supset E$.

If in two sets A and B, all the elements of A are contained in B, and all the elements of B are contained in A, then the sets A and B are called *equal sets*. We denote this by writing $A = B$.

Therefore, in two equal sets A and B, $A \subset B$ and $B \subset A$. Conversely, if $A \subset B$ and $B \subset A$, then $A = B$.

Unless otherwise stated, the order in which the elements occur in a set is not of importance. Also an element may be repeated several times. In this way,

$$\left\{1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{5}\right\} = \left\{\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{6}, \tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{8}, \tfrac{1}{10}+\tfrac{1}{10}\right\}$$

$$= \left\{\tfrac{1}{2}, \tfrac{2}{6}, \tfrac{3}{15}, \tfrac{5}{20}, 1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}\right\}$$

* This is true even if A = B. Hence, it is also usual to write these as $A \subseteq B$ or as $B \subseteq A$.

ಒಂದು ಗಣದಲ್ಲಿ ಅಂಶಗಳೇ ಇಲ್ಲದಿರುವ ಸಂದರ್ಭಕ್ಕೂ ಅವಕಾಶವಮಾಡಿಕೊಟ್ಟು ಅದರ ಉಪಯೋಗವನ್ನೂ ಪಡೆಯಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಇಂಥ ಗಣಕ್ಕೆ ಶೂನ್ಯಗಣ ಎಂದು ಹೆಸರು.

ಉದಾ : ಕಾಲೇಜಿನಲ್ಲಿ ಹತ್ತಡಿ ಎತ್ತರವಿರುವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಗಣ. ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ 200^{0} ಇರುವ ಸಮತಳ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಗಣ, ಇತ್ಯಾದಿ. ಶೂನ್ಯಗಣವನ್ನು ϕ ಎಂಬ ಚಿಹ್ನೆಯಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.

1.2 **ಉಪಗಣ.** A, B ಎಂಬ ಎರಡು ಗಣಗಳಲ್ಲಿ, A ಯ ಎಲ್ಲ ಗಣಾಂಶಗಳೂ B ಯಲ್ಲಿ ಅಡಕವಾಗಿದ್ದರೆ, A ಗಣವನ್ನು B ಯ ಉಪಗಣವೆನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಇದನ್ನು $A \subset B$ (A, B ಯಲ್ಲಿ ಅಡಕವಾಗಿದೆ) ಎಂದೂ $B \supset A$ (B, A ಯನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿದೆ) ಎಂದೂ ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.*

ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯ ಪ್ರಕಾರ, ಪ್ರತಿಗಣವೂ ತನ್ನದೇ ಉಪಗಣವಾಗುತ್ತದೆ. ಮುಂದಿನ ವಿಷಯಗಳ ಸೌಕರ್ಯಕ್ಕಾಗಿ, ಶೂನ್ಯಗಣವು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಗಣದ ಉಪಗಣವಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾ : ಸಮಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣ $E = \{2, 4, 6, \ldots\}$ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣ $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6 \ldots\}$ ಎಂಬುದರ ಉಪಗಣ. $E \subset N$ ಅಥವಾ $N \supset E$.

A, B ಎಂಬ ಎರಡು ಗಣಗಳಲ್ಲಿ A ಯ ಎಲ್ಲ ಗಣಾಂಶಗಳೂ B ಯಲ್ಲಿದ್ದು B ಯ ಎಲ್ಲ ಗಣಾಂಶಗಳೂ A ಯಲ್ಲಿ ಇದ್ದರೆ, A, B ಎಂಬುವು **ಸಮಗಣಗಳು** ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಇದನ್ನು $A = B$ ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, A, B ಸಮಗಣಗಳಾದರೆ $A \subset B$ ಮತ್ತು $B \subset A$. ವಿಲೋಮವಾಗಿ $A \subset B$, $B \subset A$ ಆಗಿದ್ದರೆ $A = B$.

ಅನ್ಯಥಾ ಹೇಳಿದ ಹೊರತು, ಒಂದು ಗಣದಲ್ಲಿರುವ ಅಂಶಗಳು ಯಾವ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಬಂದಿವೆ ಎಂಬುದು ಮುಖ್ಯವಲ್ಲ, ಒಂದೇ ಅಂಶವು ಅನೇಕ ಬಾರಿ ಬಾರದಿರಬಹುದು. ಇದರಂತೆ

$$\left\{ 1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{5} \right\} = \left\{ \tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{6}, \tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{8}, \tfrac{1}{10}+\tfrac{1}{10} \right\}$$

$$= \left\{ \tfrac{1}{2}, \tfrac{2}{6}, \tfrac{3}{15}, \tfrac{5}{20}, 1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4} \right\}$$

*$A = B$ ಆಗಿದ್ದರೂ ಇದು ನಿಜವಿರುವುದರಿಂದ, ಇದನ್ನು $A \subseteq B$. ಅಥವಾ $B \supset A$ ಎಂದು ಬರೆಯುವುದುಂಟು.

1·3 Operations on sets

Union. The set obtained by collecting together the elements of two or more sets is called the *union* of the given sets. The union of the sets A and B is denoted by $A \cup B$. The union of $A_1, A_2, A_3, \ldots\ldots$ is written $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots\ldots\ldots$ or as $\underset{(r)}{\cup} A_r$.

$A \cup B$ is the set $\{ x \mid x \in A, \text{ or } x \in B \}$

The set of elements which are contained in A but not in B is called their *difference*, and is denoted by $A - B$.

$$A - B = \{ a \mid a \in A, \text{ and } a \notin B \}$$

Ex: $A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots\ldots\ldots\ldots\}$

$B = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{9}, \ldots\ldots\}$

$A \cup B = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\ldots\}$

$A - B = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{10}, \ldots\ldots\}$

$B - A = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0\}$

Intersection. The set of elements common to two given sets is called their intersection. This is denoted by $A \cap B$. The intersection of several sets can be defined similarly, and can be denoted by $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots\ldots$ or as $\underset{(r)}{\cap} A_r$.

In the above example,

$$A \cap B = \{\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{9}, \ldots\ldots\}$$

Note that $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$, but $A - B$ and $B - A$ are generally not equal.

1 3 ಗಣಪರಿಕರ್ಮಗಳು

ಸಂಯೋಗ. ಎರಡು ಅಥವಾ ಹೆಚ್ಚು ಗಣಗಳಲ್ಲಿರುವ ಗಣಾಂಶಗಳನ್ನು ಒಟ್ಟುಗೂಡಿಸಿ ಪಡೆದ ಗಣಕ್ಕೆ ದತ್ತಗಣಗಳ **ಸಂಯೋಗ** ಎಂದು ಹೆಸರು.

A, B ಗಣಗಳ ಸಂಯೋಗವನ್ನು $A \cup B$ ಎಂದೂ, $A_1, A_2, A_3, \ldots$ ಗಣಗಳ ಸಂಯೋಗವನ್ನು $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots$ ಎಂದೂ ಅಥವಾ $\underset{(r)}{\cup} A_r$ ಎಂದೂ ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

$A \cup B$ ಎಂದರೆ $\{ x \mid x \in A$ ಅಥವಾ $x \in B \}$ ಎಂಬ ಗಣ.

A ಗಣದಲ್ಲಿದ್ದು B ಗಣದಲ್ಲಿಲ್ಲದಿರುವ ಅಂಶಗಳುಳ್ಳ ಗಣಕ್ಕೆ ಅವುಗಳ **ಅಂತರ** ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಇದನ್ನು A—B ಎಂದು ಗುರ್ತಿಸುತ್ತೇವೆ.

$$A - B = \{ a \mid a \in A \text{ ಮತ್ತು } a \in B \}$$

ಉದಾ : $A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots\}$

$$B = \{ -5, -4, -3, -2, -1, 0, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{6}, \tfrac{1}{9}, \ldots \}$$

$$A \cup B = \{ -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{4}, \ldots \}$$

$$A - B = \{ 1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{5}, \tfrac{1}{7}, \tfrac{1}{8}, \tfrac{1}{10}, \ldots \}$$

$$B - A = \{ -5, -4, -3, -2, -1, 0 \}$$

ಛೇದನ: ಎರಡೂ ಗಣಗಳಲ್ಲಿರುವ ಅಂಶಗಳನ್ನೊಳಗೊಂಡ ಗಣಕ್ಕೆ ಅವುಗಳ **ಛೇದನ** ಎಂದು ಹೆಸರು. ಇದನ್ನು $A \cap B$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಹೀಗೆಯೇ ಅನೇಕ ಗಣಗಳ ಛೇದನವನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಬಹುದು. ಛೇದನವನ್ನು $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots$ ಎಂದಾಗಲಿ $\underset{(r)}{\cap} A_r$ ಎಂದಾಗಲಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ

$$A \cap B = \{ \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{6}, \tfrac{1}{9}, \ldots \}$$

$A \cup B = B \cup A$ ಎಂದೂ, $A \cap B = B \cap A$ ಎಂದೂ, ಆದರೆ A—B, B—A ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಒಂದೇ ಅಲ್ಲ ಎಂದೂ ಗಮನಿಸಿ.

If there are no common elements between two sets, their intersection is the null set. Thus, if

$$A = \{1, 2, 3\}, \quad B = \{4, 5, 6\}, \quad A \cap B = \phi$$

Complement. We may consider a set which contains as its subsets all the sets that we use. This is called the *Universal* set. Let us denote this by the symbol E. Then the set $E - A$ is called the complement of A, and will be denoted by A'. Therefore $A \cup A' = E$, while $A \cap A' = A' \cap A = \phi$

1·4 Simple Theorems

(1) $(A - B) \cup B = A \cup B$

Proof: Let a denote an element contained in A, and not in B.

$$\therefore \; A - B = \{a \mid a \in A \,;\, a \notin B\}$$

$$\therefore \; (A - B) \cup B = \{x \mid x \in A, \, x \notin B, \text{ or } x \in B\}$$
$$= A \cup B$$

The theorem may be illustrated by means of a Venn diagram.*

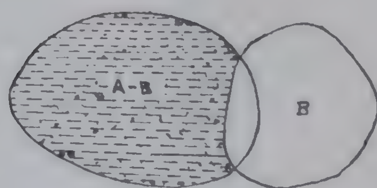


Fig. 1.1

Let the curve on the left include the elements of the set A, and the curve on the right those of B. The portion with the dotted lines then represents $A - B$. It is evident that $(A-B) \cup B$ and $A \cup B$ are identical.

[*Note* :—Venn diagrams are helpful in understanding or guessing the relations between sets. They vividly display the properties of sets. But they do not by themselves provide rigorous proofs of these properties].

*Pre-University Mathematics, Part I, p.13

ಎರಡು ಗಣಗಳಲ್ಲಿ ಎರಡರಲ್ಲೂ ಇರುವ ಅಂಶಗಳು ಯಾವುವೂ ಇಲ್ಲದಿದ್ದರೆ, ಅವುಗಳ ಛೇದನ ಶೂನ್ಯಗಣ.

ಉದಾ: $A=\{1, 2, 3\}$, $B=\{4, 5, 6\}$, $A\cap B=\phi$

ಪೂರಕ. ನಾವು ಉಪಯೋಗಿಸುವ ಎಲ್ಲ ಗಣಗಳನ್ನೂ ಒಳಗೊಳ್ಳುವಂತಹ ಗಣವೊಂದನ್ನು **ವಿಶ್ವಗಣ** ಎಂದು ಕರೆಯಬಹುದು. ಇದನ್ನು E ಎಂದು ಬರೆಯೋಣ. $E-A$ ಎಂಬ ಗಣವನ್ನು Aಯ **ಪೂರಕ** ಎಂದು ಕರೆದು A' ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ $A\cup A'=E$, ಮತ್ತು $A\cap A'=A'\cap A=\phi$

1.4 ಸುಲಭ ಪ್ರಮೇಯಗಳು

$$(1) \qquad (A-B)\cup B=A\cup B$$

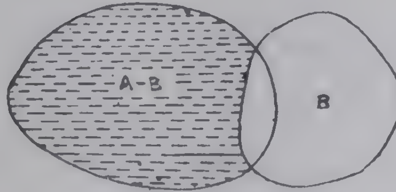
ಸಾಧನೆ: Aನಲ್ಲಿದ್ದು Bನಲ್ಲಿಲ್ಲದ ಯಾವುದೇ ಅಂಶವನ್ನು a ಎಂದು ಕರೆಯೋಣ.

$$\therefore A-B = \{a \mid a\in A;\ a\notin B\}$$

$$\therefore (A-B)\cup B=\{x \mid x\in A,\ x\notin B \text{ ಅಥವಾ } x\in B\}$$

$$=A\cup B$$

ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ವೆನ್ ಚಿತ್ರದ* ಮೂಲಕ ಚಿತ್ರಿಸಬಹುದು.



ಚಿತ್ರ 1.1

ಎಡಗಡೆಯ ರೇಖೆ A ಗಣವನ್ನೂ, ಬಲಗಡೆಯ ರೇಖೆ B ಗಣವನ್ನೂ ಒಳಗೊಂಡಿರಲಿ. ಆದ್ದರಿಂದ ಸಣ್ಣ ಗೀರು ಹಾಕಿರುವ ಭಾಗ $A-B$.

$(A-B)\cup B$ ಮತ್ತು $A\cup B$ ಎರಡೂ ಒಂದೇ ಎಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟ.

[**ಸೂಚನೆ:** ವೆನ್ ಚಿತ್ರಗಳು ಗಣಗಳ ನಡುವೆ ಇರುವ ಸಂಬಂಧಗಳನ್ನು ತಿಳಿಯಲು ಅಥವಾ ಊಹಿಸಲು, ಸಹಾಯಕವಾಗಿ, ಗಣಗಳ ಗುಣಗಳನ್ನು ಕಣ್ಣಿಗೆ ಕಟ್ಟುತ್ತವೆ. ಆದರೆ ಇವು ನಿಖರವಾದ ಸಾಧನೆಗಳನ್ನು ಒದಗಿಸಲಾರವು].

---

* ಪ್ರೀ ಯೂನಿವರ್ಸಿಟಿ ಗಣಿತ ಶಾಸ್ತ್ರ: ಭಾ. 1. ಪುಟ. 13.

(2) $(A - B) \cap B = \phi$

(3) $A - B = A - (A \cap B)$

(4) $(A \cap B) \cup (A - B) = A$

Exhibit these results by Venn diagrams. Also give their rigorous proofs. By way of example, we prove (4) here.

$A \cap B$ and $A - B$ are both subsets of A.

Therefore, $(A \cap B) \cup (A - B) \subset A$ (i)

Let a be any element of A. If a is not in B, then $a \in A - B$. If a is in B, $a \in A \cap B$. Hence the union of $A - B$ and $A \cap B$ must contain A completely.

$$\therefore (A \cap B) \cup (A - B) \supset A \qquad \text{(ii)}$$

The theorem follows from (i) and (ii)

(5) De Morgan's Theorem*. If A, B, C are three sets,

$$(A - B) \cap (A - C) = A - (B \cup C)$$

If A is considered as the universal set, $A - B$ is the complement of A. De Morgan's Theorem can therefore be enunciated in the following form :

The intersection of complements is the complement of the union.

* De Morgan (1806—1871) was an Englishman who was born in Madurai in South India. His famous work is his *Budget of Paradoxes*. One finds in his writings some novelty, humour as well as some oddity.

(2) $(A-B)\cap B=\phi$

(3) $A-B=A-(A\cap B)$

(4) $(A\cap B)\cup(A-B)=A$

ವೆನ್ ಚಿತ್ರಗಳಿಂದ ಮೇಲಿನವುಗಳನ್ನು ಪ್ರದರ್ಶಿಸಿ, ನಿಖರವಾದ ಸಾಧನೆಯನ್ನೂ ಕೊಡಿರಿ. ಮಾದರಿಗಾಗಿ (4)ರ ಸಾಧನೆಯನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ಕೊಡುತ್ತೇವೆ.

$A\cap B$ ಎಂಬ ಗಣವೂ $A-B$ ಗಣವೂ A ಯ ಉಪಗಣಗಳು.

ಆದ್ದರಿಂದ $(A\cap B)\cup(A-B)\subset A$ (i)

ಈಗ A ಗಣದ ಯಾವುದೇ ಅಂಶ a ಆಗಿರಲಿ.

a, B ನಲ್ಲಿಲ್ಲದಿದ್ದರೆ, $a \in A-B$

a, B ನಲ್ಲಿದ್ದರೆ, $a \in A\cap B$

ಆದ್ದರಿಂದ $A-B$ ಮತ್ತು $A\cap B$ ಗಳ ಸಂಯೋಗವು A ಯನ್ನು ಪೂರ್ತಿಯಾಗಿ ಒಳಗೊಂಡಿರಬೇಕು.

ಎಂದರೆ $(A\cap B)\cup(A-B)\supset A$ (ii)

(i), (ii) ರಿಂದ ಪ್ರಮೇಯವು ಸಾಧಿಸಿದಂತಾಗುತ್ತದೆ.

(5) ಡಿ ಮಾರ್ಗನನ *ಪ್ರಮೇಯ. A,B,C ಮೂರು ಗಣಗಳಾದರೆ,

$(A-B)\cap(A-C)=A-(B\cup C)$.

A ಯನ್ನು ವಿಶ್ವಗಣವೆಂದು ಭಾವಿಸಿದರೆ, $A-B$ ಗಣವು B ಯ ಪೂರಕ.

ಆದ್ದರಿಂದ ಡಿ ಮಾರ್ಗನನ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಹೀಗೆ ಉಲ್ಲೇಖಿಸಬಹುದು: **ಪೂರಕಗಳ ಛೇದನವು ಸಂಯೋಗದ ಪೂರಕ.**

ಡಿ ಮಾರ್ಗನ್ (1806—1871) ದಕ್ಷಿಣ ಭಾರತದ ಮಧುರೆಯಲ್ಲಿ ಜನಿಸಿದ ಇಂಗ್ಲಿಷರವನು. ಈತನ ಬಡ್ಜೆಟ್ ಆಫ್ ಪೆರಾಡೋಕ್ಸಸ್ ಎಂಬುದು ಪ್ರಸಿದ್ಧ ಲೇಖನ. ಈತನ ಲೇಖನಗಳಲ್ಲಿ ನವೀನತೆಯೂ ವಿನೋದವೂ ಸ್ವಲ್ಪ ವಕ್ರತೆಯೂ ಕಂಡುಬರುತ್ತವೆ.

The Venn diagram: Let the set A lie inside the circle, B inside the square and C inside the rectangle.

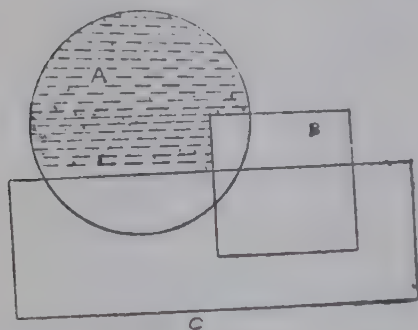
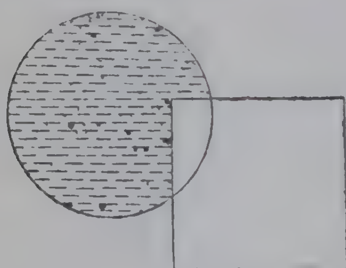


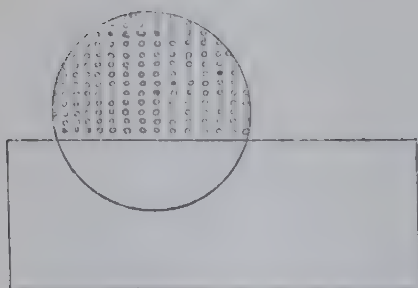
Fig. 1.2

To clarify ideas, we show the sets $A-B$, $A-C$, $B \cup C$ separately below.



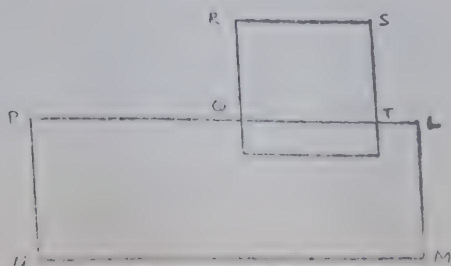
The dotted portion denotes $A-B$.

Fig. 1.3



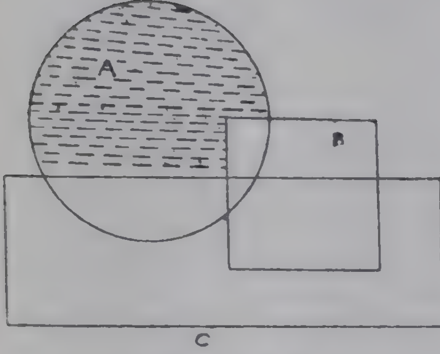
The portion with the small zeros is $A-C$.

Fig 1.4



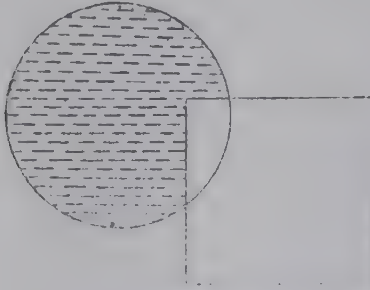
The rectilinear figure bounded by the points $P\ Q\ R\ S\ T\ L\ M\ N\ P$ is

ವೆನ್ ಚಿತ್ರ: A ಗಣ ವೃತ್ತದೊಳಗೂ, B ಗಣ ಚಚ್ಚೌಕದೊಳಗೂ C ಆಯತದೊಳಗೂ ಇದೆಯೆಂದು ಭಾವಿಸಿ.

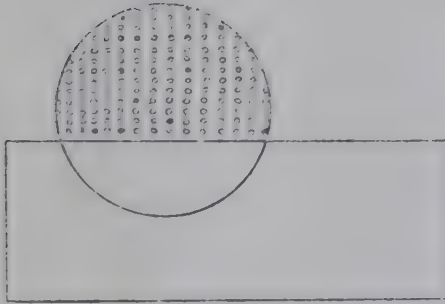


ಚಿತ್ರ 1.2

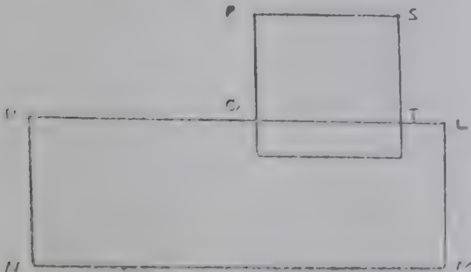
ಸುಲಭವಾಗಿ ಗ್ರಹಿಸುವುದಕ್ಕಾಗಿ A—B, A—C, BUC ಗಣಗಳನ್ನು ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾಗಿ ಕೆಳಗೆ ತೋರಿಸುತ್ತೇವೆ.


ಚಿತ್ರ 1.3

ಸಣ್ಣ ಗೀರುಗಳಿರುವ ಭಾಗ A—B


ಚಿತ್ರ 1.4

ಸಣ್ಣ ಸೊನ್ನೆಗಳಿರುವ ಭಾಗ A—C.



ಚಿತ್ರ 1.5

PQRSTLMNP ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಡಿರಕ್ಯಕೂದ ಸಳ ರೇಖಾ BUC.

$(A-B) \cap (A-C)$ and $A-(B \cup C)$ are both given by the dotted portion in Fig 1.2.

Rigorous proof: Let x denote any element of $A-(B \cup C)$
Therefore, $x \in A$ and $x \notin (B \cup C)$

$\therefore x \notin B$ and $x \notin C$

$\therefore x \in A-B$ and $x \in A-C$

$\therefore x \in (A-B) \cap (A-C)$

$\therefore (A-B) \cap (A-C) \supset A-(B \cup C)$ (i)

Now let . . . y be any element of the set $(A-B) \cap (A-C)$.

$\therefore$ By the definition of intersection,

$y \in A-B$ and $y \in A-C$

$\therefore y \in A, y \notin B, y \notin C$

$\therefore y \notin (B \cup C)$

$\therefore y \in A-(B \cup C)$

$\therefore (A-B) \cap (A-C) \subset A-(B \cup C)$ (ii)

De Morgan's Theorem follows from (i) and (ii).

Exercise 1.1

Prove the following:

1 If $A \subset B$, $B \subset C$, then $A \subset C$

2 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

3 $A \cap (B-C) = (A \cap B) - (A \cap C)$

4 $A \cap B = A-(A-B) = B-(B-A)$

5 $(A-B) \cup (B-C) = (A \cup B) - (A \cap C)$

6 $(A-B) \cup (A-C) = A-(B \cap C)$

7 If $A-B = B-A$, then $A = B$

8 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

9 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$(A-B) \cup (A-C)$ ಎಂಬುದೂ $A-(B \cup C)$ ಎಂಬುದೂ 1.2ನೆಯ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಗೀರುಗಳಿರುವ ಭಾಗವಾಗುತ್ತದೆ.

ನಿಖರಸಾಧನೆ: $A-(B \cup C)$ ಗಣದಲ್ಲಿರುವ ಯಾವುದೇ ಅಂಶ x ಆಗಿರಲಿ.

ಆದ್ದರಿಂದ $x \in A$ ಮತ್ತು $x \notin (B \cup C)$

$\therefore x \notin B$ ಮತ್ತು $x \notin C$.

ಆದ್ದರಿಂದ $x \in A-B$ ಮತ್ತು $x \in A-C$

$\therefore \quad x \in (A-B) \cap (A-C)$

$\therefore \quad (A-B) \cap (A-C) \supset A-(B \cup C) \quad$ (i)

ಈಗ $(A-B) \cap (A-C)$ ಗಣದ ಯಾವುದೇ ಅಂಶ y ಆಗಿರಲಿ.

$\therefore$ ಛೇದನದ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯ ಪ್ರಕಾರ,

$y \in A-B$ ಮತ್ತು $y \in A-C$

$\therefore \quad y \in A, y \notin B, \quad y \notin C$

$\therefore \quad y \notin (B \cup C)$

$\therefore \quad y \in A-(B \cup C)$

$\therefore \quad (A-B) \cap (A-C) \subset A-(B \cup C) \quad$ (ii)

(i) ಮತ್ತು (ii) ರಿಂದ, ಡಿ ಮಾರ್ಗನನ ಪ್ರಮೇಯ ಸಾಧಿತವಾಗುತ್ತದೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ 1.1

ಇವುಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಿ

1. $A \subset B$, $B \subset C$ ಆದರೆ $A \subset C$
2. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
3. $A \cap (B-C) = (A \cap B)-(A \cap C)$
4. $A \cap B = A-(A-B) = B-(B-A)$
5. $(A-B) \cup (B-C) = (A \cup B)-(A \cap C)$
6. $(A-B) \cup (A-C) = A-(B \cap C)$
7. $A-B = B-A$ ಆಗಲು $A=B$ ಆಗಬೇಕು.
8. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
9. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

1·5 Enumerable Sets. In a finite set, we can actually count the number of elements. Suppose a book has three hundred pages. Then the set of its pages has three hundred elements. In mathematical language, the *cardinal number* of the set of pages of the book is three hundred. Similarly, the cardinal number of the set of a man's fingers is ten. The meaning of cardinal number when applied to a finite set will be clear from these examples. The idea of counting will now be extended so as to be applicable to a certain type of infinite sets.

Examples will be readily available in everyday life where the elements of one set correspond to the elements of another set. For every telephone in a town, there exists a number in the directory. Every passenger in a railway train possesses a ticket. If in two sets, every element of the first set corresponds to one and only one element of the second set, and also every element of the second set corresponds to one and only one element of the first, then we say that the two sets are in one-to-one correspondence. We also say that two such sets are cardinally equivalent or have the same cardinal number. Examples:

(i) The fingers of the left hand —— the fingers of the right hand.

(ii) $A = \{1, 4, 5, 6, 19\}$ $B = \{1\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2}, 5\frac{1}{2}, 6\frac{1}{2}, 19\frac{1}{2}\}$

(iii) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$

$B = \{-1, -2, -3, -4, -5, \ldots\}$

In the last example, A and B are both infinite sets. A is called the *set of natural numbers*. A one–one correspondence between the elements of A and B is given by $(1, -1)$, $(2, -2,)$ etc. Sets of the type B are called *countable* or *enumerable.*

1.5 ಸಂಖ್ಯೇಯ ಗಣಗಳು. ಪರ್ಯಾಪ್ತ ಗಣವೊಂದರಲ್ಲಿ ಗಣಾಂಶಗಳು ಎಷ್ಟಿವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಎಣಿಸಿ ನೋಡಬಹುದು. ಒಂದು ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಮುನ್ನೂರು ಪುಟಗಳಿವೆ ಎನ್ನೋಣ; ಎಂದರೆ ಅದರ ಪುಟಗಳ ಗಣದಲ್ಲಿ ಮುನ್ನೂರು ಅಂಶಗಳಿರುತ್ತವೆ. ಈ ವಿಷಯವನ್ನು ಗಣಿತದ ಪರಿಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ ಹೇಳಬೇಕಾದರೆ, "ಪುಸ್ತಕದ ಪುಟಗಳ ಗಣದ **ಸಂಖ್ಯಾಸೂಚಕ ಅಂಕೆ** ಮುನ್ನೂರು" ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಹೀಗೆಯೇ, ಒಬ್ಬನ ಕೈ ಬೆರಳುಗಳ ಗಣದ ಸಂಖ್ಯಾಸೂಚಕ ಅಂಕೆ ಹತ್ತು. ಈ ಉದಾಹರಣೆಗಳಿಂದ, ಯಾವ ದೊಂದು ಪರ್ಯಾಪ್ತಗಣದ ಸಂಖ್ಯಾಸೂಚಕ ಅಂಕೆ ಎಂದರೆ ಏನೆಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟ ವಾಗುತ್ತದೆ. ಒಂದು ಬಗೆಯ ಅನಂತ ಗಣಗಳಿಗೂ ಅನ್ವಯಿಸುವಂತೆ ಎಣಿಕೆ ಎಂಬ ಭಾವನೆಯ ವಿಸ್ತರಣೆಯನ್ನು ಮುಂದೆ ನೀಡುತ್ತೇವೆ.

ಎರಡು ಗಣಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದರ ಅಂಶಗಳು ಇನ್ನೊಂದರ ಅಂಶಗಳೊಡನೆ ಜೋಡಣೆ ಯಾಗುವ ಸಂದರ್ಭಗಳು ನಿತ್ಯಜೀವನದಲ್ಲಿ ಹೇರಳವಾಗಿ ಸಿಗುತ್ತವೆ. ಒಂದು ಊರಿ ನಲ್ಲಿರುವ ಪ್ರತಿ ಟೆಲಿಫೋನಿಗೂ ಡೈರೆಕ್ಟರಿ ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಒಂದು ನಂಬರು ಇರುತ್ತದೆ. ರೈಲ್ವೆಗಾಡಿಯಲ್ಲಿರುವ ಪ್ರತಿ ಪ್ರಯಾಣಿಕನಿಗೂ ಒಂದು ಟಿಕೆಟ್ಟು ಇರುತ್ತದೆ. ಎರಡು ಗಣಗಳಲ್ಲಿ ಮೊದಲನೆಯದರ ಪ್ರತಿ ಗಣಾಂಶಕ್ಕೂ ಎರಡನೆಯದರ ಒಂದು, ಒಂದೇ ಒಂದು ಅಂಶವು ಜೋಡಣೆಯಾಗಿ ಎರಡನೆಯದರ ಪ್ರತಿ ಅಂಶಕ್ಕೂ ಮೊದಲನೆಯದರ ಒಂದು, ಒಂದೇ ಅಂಶವು ಜೋಡಣೆಯಾಗುವುದಿದ್ದರೆ, ಗಣಗಳು **ಏಕ–ಏಕ ಹೊಂದಾಣಿಕೆ**ಯಲ್ಲಿವೆ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಇಂಥ ಎರಡು ಗಣಗಳು ಸಾಂಖ್ಯಿಕವಾಗಿ ಸಮಾನವಾಗಿವೆ ಅಥವಾ ಒಂದೇ ಸಂಖ್ಯಾಸೂಚಕ ಅಂಕೆಯನ್ನು ಪಡೆದಿವೆ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾ :

(i) ಎಡಗೈಯ ಬೆರಳುಗಳು— ಬಲಗೈಯ ಬೆರಳುಗಳು.

(ii) $A = \left\{ 1, 4, 5, 6, 19 \right\}, B = \left\{ 1\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2}, 5\frac{1}{2}, 6\frac{1}{2}, 19\frac{1}{2} \right\}$

(iii) $A = \left\{ 1, 2, 3, 4, 5 \ldots \right\}$

$B = \left\{ -1, -2, -3, -4, -5 \ldots \right\}$

ಮೂರನೆಯ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ A, B ಎರಡೂ ಅನಂತ ಗಣಗಳು. A ಗೆ **ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯಾಗಣ** ಎಂದು ಹೆಸರು. A, B ಗಳ ಅಂಶಗಳಿಗೆ ಪರಸ್ಪರ ಏಕ–ಏಕ ಜೋಡಣೆ ಇದೆ. (1, –1), (2,—2), ಹೀಗೆ. B ಯಂಥ ಗಣ ಗಳನ್ನು ಸಂಖ್ಯೇಯ ಗಣಗಳು ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

Definition:—If the elements of a set can be put in one-to-one correspondence with the elements of the set of natural numbers, the set is called enumerable or countable. If this is not possible, the set is un-enumerable.

Examples of enumerable sets :

$$\left\{ 1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{5}, \ldots \right\}$$

$$\left\{ 1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, \ldots \right\}$$

$$\left\{ 1^2, 3^2, 5^2, 7^2, 9^2, \ldots \right\}$$

$$\left\{ 1, 1+\tfrac{1}{2}, 1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}, 1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4} \ldots \right\}$$

A set in the form $\left\{ a_1, a_2, a_3 \cdots, a_n, \ldots \right\}$ is called a sequence. The student will have come across* simple examples of sequences in his previous class. Every element of a sequence has a fixed place, and one can find out the element having a given place. A set possessing these properties is a sequence. It is evident that a sequence can be placed in one-to-one correspondence with the set of natural numbers. Hence, a set which can be expressed as a sequence is enumerable.

Examples :—

(1) The set of even numbers is enumerable.

$$\left.\begin{matrix} 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & \ldots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \ldots \end{matrix}\right\}$$ A one-to-one correspondence is evident.

(2) Similarly the set of odd numbers is enumerable.

$$\left.\begin{matrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \; 11 \ldots & 2n-1 \ldots \\ 2.1-1 & 2.2-1 & 2.3-1 & 2.4-1 & \ldots & 2.n-1 \ldots \end{matrix}\right\}$$

establishes a one-to-one correspondence.

(3) The union of two enumerable sets is enumerable.
For, if

* *Pre - University Mathematics*, Part 1, p. 119.

ವ್ಯಾಖ್ಯೆ. ಒಂದುಗಣದ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯಾಗಣದ ಅಂಶಗಳೊಂದಿಗೆ ಏಕ-ಏಕ ಹೊಂದಾಣಿಕೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿದ್ದರೆ, ಆ ಗಣವನ್ನು ಸಂಖ್ಯೇಯ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಇದು ಸಾಧ್ಯವಲ್ಲದಿದ್ದರೆ, ಗಣವು ಅಸಂಖ್ಯೇಯ.

ಸಂಖ್ಯೇಯ ಗಣಗಳ ಉದಾಹರಣೆಗಳು :

$$\left\{ 1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{5}, \ldots \right\}$$

$$\left\{ 1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2 \ldots \right\}$$

$$\left\{ 1^2, 3^2, 5^2, 7^2, 9^3, \ldots \right\}$$

$$\left\{ 1, 1+\tfrac{1}{2}, 1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}, 1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}, \ldots \right\}$$

$\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\}$ ರೂಪದಲ್ಲಿರುವ ಗಣವನ್ನು ಶ್ರೇಢಿ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಸುಲಭ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಹಿಂದಿನ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಅಭ್ಯಸಿಸಿರುವಿರಿ*. ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿರುವ ಪ್ರತಿ ಅಂಶಕ್ಕೂ ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟಸ್ಥಾನವಿದೆ ಮತ್ತು ನಿರ್ದಿಷ್ಟಸ್ಥಾನವುಳ್ಳ ಅಂಶವನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು. ಈ ಗುಣಗಳುಳ್ಳ ಗಣಕ್ಕೆ ಶ್ರೇಢಿ ಎಂದು ಹೆಸರು. ಶ್ರೇಢಿಯನ್ನು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯಾಗಣದೊಡನೆ ಏಕ-ಏಕ ಹೊಂದಾಣಿಕೆ ಹೊಂದಿಸಲು ಆಗುತ್ತದೆಯೆಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟ. ಆದ್ದರಿಂದ **ಶ್ರೇಢಿಯರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಹುದಾದ ಗಣವು ಸಂಖ್ಯೇಯ.**

ಉದಾಹರಣೆಗಳು :

(1) ಸಮಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣ ಸಂಖ್ಯೇಯ.

$$\left.\begin{array}{cccccc} 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 \ldots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \ldots \end{array}\right\} \text{ಏಕ-ಏಕ ಹೊಂದಾಣಿಕೆ ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿದೆ.}$$

(2) ಹೀಗೆಯೇ ವಿಷಮಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣ ಸಂಖ್ಯೇಯ.

$$\left.\begin{array}{cccccc} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \ldots & 2n-1 \ldots \\ 2\cdot1-1 & 2\cdot2-1 & 2\cdot3-1 & 2\cdot4-1 & \ldots & 2\cdot n-1 \ldots \end{array}\right\} \text{ಏಕ-ಏಕ ಹೊಂದಾಣಿಕೆಯಾಗಿದೆ.}$$

(3) ಎರಡು ಗಣಗಳು ಸಂಖ್ಯೇಯವಾದರೆ, ಅವುಗಳ ಸಂಯೋಗವೂ ಸಂಖ್ಯೇಯ. ಏಕೆಂದರೆ

* ಪ್ರಿಯೂನಿವರ್ಸಿಟಿ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರ – ಭಾಗ 1, ಪು. 119

$$A = \{ a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots \}$$

$$B = \{ b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots \}$$

are two enumerable sets, then $A \cup B$ can be expressed as a sequence in the form

$$A \cup B = \{ a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, \ldots \}$$

(4) If in an enumerable set or sequence, some elements are removed according to some law, the remaining elements also form an enumerable set. For these remaining elements form a sequence. Examples (1) and (2) immediately follow from this.

(5) Following the method indicated in (3), *the union of a finite (or enumerable) number of enumerable sets is enumerable.*

We can state this in the following form too:

(6) *If every element of a finite (or enumerable) set is an enumerable set, their union is enumerable.*

Let $A_1 = \{ a_{11}, a_{12}, a_{13}, \ldots a_{1n}, \ldots \}$

$A_2 = \{ a_{21}, a_{22}, a_{23}, \ldots, a_{2n}, \ldots \}$

$A_3 = \{ a_{31}, a_{32}, a_{33}, \ldots, a_{3n}, \ldots \}$

. . . .

$A_r = \{ a_{r1}, a_{r2}, a_{r3}, \ldots \}$

. . . . . .

the set $\{ A_1, A_2, A_3, \ldots, A_r \ldots \}$ being a finite or enumerable set.

$$A = \{ a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots \}$$

ಮತ್ತು $B = \{ b_1, b_2, b_3, \cdots b_n, \cdots \}$

ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೇಯ ಗಣಗಳಾದರೆ, $A \cup B$ ಯನ್ನು

$A \cup B = \{ a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, \cdots \}$ ಎಂಬ ಶ್ರೇಢಿಯ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

(4) ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೇಯ ಗಣದಲ್ಲಿ ಎಂದರೆ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಕ್ರಮದಂತೆ ಗಣಾಂಶಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಬಿಟ್ಟರೆ, ಉಳಿದ ಅಂಶಗಳೂ ಸಂಖ್ಯೇಯ ಗಣವನ್ನು ಕೊಡುತ್ತವೆ. ಏಕೆಂದರೆ ಉಳಿದ ಅಂಶಗಳೂ ಒಂದು ಶ್ರೇಢಿಯ ರೂಪದಲ್ಲಿವೆ. ಮೇಲಣ ಉದಾಹರಣೆಗಳು (1) ಮತ್ತು (2) ಇದರಿಂದ ಒಡನೆಯೇ ಬರುತ್ತವೆ.

(5) (3)ರ ವಿಧಾನದಂತೆಯೇ, **ಒಂದು ಪರ್ಯಾಪ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಸಂಖ್ಯೇಯ ಗಣಗಳ ಸಂಯೋಗವೂ ಸಂಖ್ಯೇಯ**. ಇದನ್ನು ಹೀಗೂ ಹೇಳಬಹುದು.

(6) **ಒಂದು ಪರ್ಯಾಪ್ತ (ಅಥವಾ ಸಂಖ್ಯೇಯ) ಗಣದ ಪ್ರತಿ ಅಂಶವೂ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೇಯ ಗಣವಾಗಿರಲಿ. ಇವುಗಳ ಸಂಯೋಗವೂ ಸಂಖ್ಯೇಯ** ಎಂದರೆ

$$A_1 = \{ a_{11}, a_{12}, a_{13}, \cdots, a_{1n}, \cdots \}$$

$$A_2 = \{ a_{21}, a_{22}, a_{23}, \cdots, a_{3n}, \cdots \}$$

$$A_3 = \{ a_{31}, a_{32}, a_{33}, \cdots, \}$$

$$A_r = \{ a_{r1}, a_{r2}, a_{r3}, \cdots \}$$

ಇತ್ಯಾದಿ.

$\{ A_1, A_2, \cdots A_r, \cdots \}$ ಎಂಬುದು ಒಂದು ಪರ್ಯಾಪ್ತ ಗಣ ಅಥವಾ ಸಂಖ್ಯೇಯ ಗಣ

Then $\cup_i A_i$ *i.e.* $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup \ldots$ is an enumerable set. To write this as a sequence, we have to write down in order the elements along the diagonals of the above diagram.

$$\cup_i A_i = \left\{a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{13}, a_{22}, a_{31}, \ldots\right\}$$

(7) Numbers which can be expressed in the form p/q where p and q are integers are called rational numbers. We prove that

All positive rational numbers form an enumerable set.

For the numbers can be expressed as the following sequence:

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{2}, \frac{3}{1}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}, \frac{4}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$$

where the formation of the numbers is clear.

Here every number repeats itself. The repetitions may be struck off, if we so desire.

In like manner, the set of all rational negative numbers is enumerable. By taking the union of these two sets, we get the theorem that *the set of all rational numbers is enumerable.*

(8) The set of rational numbers between 0 and 1 is enumerable. For the numbers can be written

$$\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \ldots\right\}$$

In like manner, the rational numbers between (1,2), (2,3), etc., form enumerable sets. Hence as in (6), their union also is enumerable. Therefore the set of all rational numbers is enumerable.

The set of irrational numbers between 0 and 1 is unenumerable. We omit the proof.

1·6 The product of sets. If in the pair (a, b) we call a as the first element and b as the second element, (a, b) is called an *ordered pair*. The coordinates (x, y) that we employ in analytical geometry give a familiar example of an ordered pair. Unless $a=b$, (a, b) and (b, a) are *different* ordered pairs. Two ordered pairs (a, b), (c, d) will be equal if and only if $a=c$ and $b=d$.

ಈಗ $\bigcup_i A_i$ ಎಂದರೆ $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup \ldots$ ಎಂಬ ಗಣವೂ ಸಂಖ್ಯೇಯ. ಏಕೆಂದರೆ ಇದನ್ನು ಶ್ರೇಢಿಯ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಲು, ನಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ತೋರಿರುವ ಕರ್ಣ ರೇಖೆಗಳಲ್ಲಿರುವ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

$$\bigcup_i A_i = \{a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{13}, a_{22}, a_{31}, \ldots\}$$

(7) p/q ರೂಪದಲ್ಲಿ (p, q ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು) ಬರೆಯಬಹುದಾದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಎಂದು ಹೆಸರು. **ಧನ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೆಲ್ಲಾ ಸಂಖ್ಯೇಯ ಗಣವನ್ನು ಕೊಡುತ್ತವೆ.** ಏಕೆಂದರೆ, ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು $\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{2}, \frac{3}{1}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}, \frac{4}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\ldots\ldots$ ಎಂಬ ಶ್ರೇಢಿಯ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಹುದು. ಇಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿ ಸಂಖ್ಯೆಯೂ ಪುನರುಕ್ತವಾಗುತ್ತದೆ. ಪುನರುಕ್ತವಾದ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಹೊಡೆದುಹಾಕಬಹುದು.

ಇದರಂತೆಯೇ ಋಣಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣವೂ ಸಂಖ್ಯೇಯ. ಇವೆರಡನ್ನೂ ಸಂಯೋಗಿಸುವುದರಿಂದ, **ಎಲ್ಲಾ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣವು ಸಂಖ್ಯೇಯ** ಎಂಬ ಪ್ರಮೇಯವು ದೊರಕುತ್ತದೆ.

(8) 0 ಮತ್ತು 1 ರ ನಡುವೆ ಇರುವ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣವು ಸಂಖ್ಯೇಯ. ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \ldots\}$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

ಹೀಗೆಯೇ (1,2) ರ ನಡುವೆ, (2,3) ರ ನಡುವೆ ಇರುವ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣಗಳೂ. ಆದ್ದರಿಂದ (6) ರ ಪ್ರಕಾರ, ಇವುಗಳ ಸಂಯೋಗವೂ ಸಂಖ್ಯೇಯ. ಎಂದರೆ ಎಲ್ಲಾ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣವು ಸಂಖ್ಯೇಯ.

0 ಮತ್ತು 1 ರ ನಡುವೆ ಇರುವ ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣವು ಅಸಂಖ್ಯೇಯವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಸಾಧನೆಯನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ಕೊಡುವುದಿಲ್ಲ.

1.6 ಗಣಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ. (a, b) ಎಂಬ ಜೋಡಣೆಯಲ್ಲಿ a ಮೊದಲನೆಯದು, b ಎರಡನೆಯದು ಎಂಬ ಭಾವನೆ ಇದ್ದರೆ, (a, b)ಯನ್ನು ಒಂದು **ಕ್ರಮಯುಗ್ಮ** ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಬೀಜರೇಖಾಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಿಸುವ (x, y) ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು ಕ್ರಮಯುಗ್ಮದ ಪರಿಚಿತ ಉದಾಹರಣೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $a = b$ ಆದ ಹೊರತು (a, b) ಮತ್ತು (b, a) ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಕ್ರಮಯುಗ್ಮಗಳು. ಎರಡು ಕ್ರಮಯುಗ್ಮಗಳು (a, b), (c, d) ಸಮನಾಗಲು $a = c$ ಮತ್ತು $b = d$ ಆಗಿರಬೇಕು.

Definition The product of any two sets S and T is the set

$$S \times T = \left\{ \{ (s, t) \mid s \in S, t \in T \right\}$$

We take any element of S along with any element of T. The set of ordered pairs so obtained is the product of S and T.

Examples

(i) $S = \{ a, b, c, \}$, $T = \{x, y)\}$

$S \times T = \{ (a, x), (b, x), (c, x), (a, y), (b, y), (c, y) \}$

$T \times S = \{ (x, a), (x, b), (x, c), (y, a), (y, b), (y, c) \}$

Generally $S \times T \neq T \times S$.

(ii) $S = \{1, 2, 3\}$, $T = \{1, 2\}$

$S \times T = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2)\}$

The set of ordered pairs that can be formed from the elements of a single set S is written $S \times S$.

Ex: If $S = \{1, 2, 3\}$,

$S \times S = \{ (1, 1), (1, 2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3) \}$

1·7 Relations. The usual meaning of this word will be made applicable to our intuition. Mother, son is a relation, two lines being mutually perpendicular is a relation. The condition $a < b$ between two real numbers is a relation It is possible to give a strict form to this concept.

Definition. *If S is a set, any subset R of S × S is called a relation upon S.* If the ordered pair (a, b) is an element of R, we write a R b, reading it as "a has the relation R with b".

ವ್ಯಾಖ್ಯೆ. S **ಮತ್ತು** T **ಎಂಬ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಗಣಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ** $S \times T$ **ಎಂಬುದು**

$S \times T = \left\{(s, t) \middle| s \in S, t \in T\right\}$ **ಎಂಬ ಗಣ.**

ಎಂದರೆ S ನ ಯಾವುದೇ ಗಣಾಂಶದೊಂದಿಗೆ T ಯ ಯಾವುದೇ ಗಣಾಂಶವನ್ನು ಜೋಡಿಸಿ ಹೀಗೆ ಬಂದ ಕ್ರಮಯುಗ್ಮಗಳ ಗಣವು S ಮತ್ತು T ಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ.

ಉದಾ:

(i) $S = \left\{ a, b, c \right\}$, $T = \left\{ x, y \right\}$.

$S \times T = \left\{ (a, x), (b, x), (c, x), (a, y), (b, y), (c, y) \right\}$

$T \times S = \left\{ (x, a), (x, b), (x, c), (y, a), (y, b), (y, c) \right\}$

ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ $S \times T \neq T \times S$

(ii) $S = \left\{ 1, 2, 3 \right\}$, $T = \left\{ 1, 2 \right\}$

$S \times T = \left\{ (1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2) \right\}$

ಒಂದೇ ಗಣ S ನ ಅಂಶಗಳಿಂದ ಉಂಟಾಗುವ ಕ್ರಮಯುಗ್ಮಗಳ ಗಣಕ್ಕೆ $S \times S$ ಎಂದು ಹೆಸರು.

ಉದಾ : $S = \left\{ 1, 2, 3, \right\}$

$$S \times S = \left\{ (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3) \right\}$$

1 7. **ಸಂಬಂಧಗಳು** ಈ ಪದದ ಸಾಮಾನ್ಯವಾದ ಅರ್ಥವನ್ನು ನಮ್ಮ ಅಂಶಬೋರ್ಧೆಗೆ ಅನ್ವಯವಾಗುವಂತೆ ಭಾವಿಸುತ್ತೇವೆ.

ತಾಯಿ, ಮಗು ಒಂದು ಸಂಬಂಧ, ಎರಡು ರೇಖೆಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿರುವುದು ಒಂದು ಸಂಬಂಧ, ಎರಡು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ $a < b$ ಒಂದು ಸಂಬಂಧ. ಈ ಭಾವನೆಗೆ ಒಂದು ನಿಖರವಾದ ರೂಪು ಕೊಡಲು ಸಾಧ್ಯ.

ವ್ಯಾಖ್ಯೆ. S **ಒಂದು ಗಣವಾದರೆ,** $S \times S$ **ನ ಒಂದು ಉಪಗಣ** R **ನ್ನು** S **ಮೇಲಣ ಒಂದು ಸಂಬಂಧ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.** (a, b) ಕ್ರಮಯುಗ್ಮವು R ನ ಅಂಶವಾದರೆ, $a R b$ ಎಂದು ಬರೆದು, a ಎಂಬುದು b ಯೊಡನೆ R ಸಂಬಂಧ ಪಡೆದಿದೆ ಎಂದು ಓದುತ್ತೇವೆ.

The relation " less than " is the set of ordered pairs (a, b) of real numbers, such that $b < a$.

The relation, "'s mother " is the set of ordered pairs (a, b) of people such that a is b's mother.

More examples will occur below.

Definition. *The relation R is an equivalence relation upon S, if it possesses the following three properties* :

Reflexivity. For every element of S, a R a.

Symmetry. If a R b, then b R a.

Transitivity. If a R b and b R c, then a R c.

Examples :

(1) S is the set of triangles in a plane. Let R be the relation

$$R = \left\{ (a, b) ;\ a \in S,\ b \in S,\ a, b \text{ are congruent triangles} \right\}$$

Therefore a R b if a and b are congruent triangles. It is clear that this is an equivalence relation.

(2) Let L be the set of straight lines in a plane. Let R be the relation.

$$R = \left\{ (a, b) ;\ a \in L,\ b \in L,\ a \perp b \right\}$$

This is not an equivalence relation. $a \perp a$ is not true. If $a \perp b$, $b \perp c$, then $a \perp c$ is not true. Reflexivity and transitivity are thus absent.

(3) If in the above example, we take $a \parallel b$, instead of $a \perp b$, the relation is an equivalence relation.

"ಗಿಂತ ಕಡಮೆ" ಎಂಬ ಸಂಬಂಧವು $b<a$ ಇರುವಂತಹ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಕ್ರಮಯುಗ್ಮ (a, b) ಗಳ ಗಣ.

"ನ ತಾಯಿ" ಎಂಬ ಸಂಬಂಧವು a ಎಂಬಾಕೆ bನ ತಾಯಿ ಆಗಿರುವಂತಹ ಜನಗಳ ಕ್ರಮಯುಗ್ಮ (a, b)ಗಳ ಗಣ.

ಇನ್ನೂ ಇತರ ಉದಾಹರಣೆಗಳು ಕೆಳಗೆ ಬರುತ್ತವೆ.

ವ್ಯಾಖ್ಯೆ. R ಎಂಬ ಸಂಬಂಧವು S ಮೇಲೆ ಒಂದು ಸಮಾನತೆ ಸಂಬಂಧ (equivalence relation) ವಾಗಲು ಕೆಳಗಿನ ಮೂರು ಗುಣಗಳಿರಬೇಕು.

ಪ್ರತಿಫಲನ S ನ ಪ್ರತಿ ಅಂಶ a ಗೂ a R a.

ಸಮಾಂಗತೆ a R b ಆಗಿದ್ದರೆ, b R a.

ವಾಹಕ a R b ಮತ್ತು b R c ಆದರೆ a R c.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು.

(1) S ಗಣವು ಒಂದು ಸಮತಲದಲ್ಲಿರುವ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಗಣ. R ಸಂಬಂಧವನ್ನು

$$R = \{ (a, b);\ a \in S,\ b \in S,\ a, b \text{ ಸರ್ವಸಮತ್ರಿಭುಜಗಳು} \}$$

ಎಂಬ ಗಣದಿಂದ ಸೂಚಿಸೋಣ. ಎಂದರೆ, a, b ಎರಡು ಸರ್ವಸಮ ತ್ರಿಭುಜಗಳಾದರೆ a R b. ಈ ಸಂಬಂಧಕ್ಕೆ ಸಮಾನತೆ ಗುಣವಿರುವುದು ಸ್ಪಷ್ಟ.

(2) ಒಂದು ತಳದಲ್ಲಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಗಣ L ಆಗಿರಲಿ. R ಸಂಬಂಧವು

$$R = \{ (a, b);\ a \in L,\ b \in L,\ a \perp b \} \text{ ಆಗಿರಲಿ.}$$

ಇದು ಸಮಾನತೆಯ ಗುಣವನ್ನು ಪಡೆದಿಲ್ಲ. $a \perp a$ ಎಂಬುದು ನಿಜವಲ್ಲ. $a \perp b$, $b \perp c$ ಆದರೆ $a \perp c$ ನಿಜವಲ್ಲ. ಹೀಗೆ ಪ್ರತಿಫಲನ ಗುಣವೂ ವಾಹಕಗುಣವೂ ಇಲ್ಲ.

(3) ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ $a \perp b$ ಬದಲಾಗಿ $a \parallel b$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಸಂಬಂಧವು ಸಮಾನತೆಯನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತದೆ.

(4) S is the set of integers. R is the relation

$$R = \{ (a, b) \mid a \in S, b \in S, a \text{ is divisible by } b \}.$$

This relation possesses reflexivity and transitivity but not symmetry.

1.8 Functions, Mappings. Students will have by now used the concept of functions quite often in algebra and in the calculus. The relation $y = x^3$ gives a value of y for each value of x. $y = 1$ if $x = 1$, $y = 8$ if $x = 2$, $y = -8$ if $x = -2$, and so on. By marking these values on graph paper we obtain a graph of the function. This graph places a vivid picture of the function before our eyes.

General y we use only such functions in which to each value of x there corresponds one and only one value of y. Such functions are called single-valued functions.

We shall now adapt the concept of function to set theory. If all the values of x form one set, and the values of y form another set, then the function establishes a correspondence between the elements of these two sets. Remembering the definition of the product of two sets, the definition of a function will be put in a new form.

Definition. A *function F of a set S to**a set T is

---

*Note the peculiar use of the prepositions. We shall also be using "*into* a set T" instead of *to* a set T. Instead of 'of a set S' we can also say "*from* a set S".

(4) S ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗಣ. R ಸಂಬಂಧವು

$$R = \{ (a,b) \mid a \in S, b \in S, a \text{ ಸಂಖ್ಯೆ } b \text{ಯಿಂದ ಭಾಜಿತವಾಗಂತ್ತದೆ.} \}$$

ಎಂದಿರಲಿ. ಈ ಸಂಬಂಧದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಫಲನಗುಣವೂ ವಾಹಕಗುಣವೂ ಇದೆ. ಆದರೆ ಸಮಾಂಗತೆಯ ಗುಣವಿಲ್ಲ.

1.8 ಉತ್ಪನ್ನಗಳು, ಚಿತ್ರಣಗಳು

ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಈಗಾಗಲೇ ಬೀಜಗಣಿತದಲ್ಲಿಯೂ ಕಲನಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿಯೂ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ಭಾವನೆಯುನ್ನು ಪಡೆದು ಹೇರಳವಾಗಿ ಉಪಯೋಗಿಸಿರುವರು. $y=x^3$ ಎಂಬ ಸಂಬಂಧದಿಂದ xನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬೆಲೆಗೂ yಯು ಒಂದು ಬೆಲೆ ದೊರಕುತ್ತದೆ. $x=1$ ಆದರೆ, $y=1$; $x=2$ ಆದರೆ $y=8$; $x=-2$ ಆದರೆ, $y=-8$, ಇತ್ಯಾದಿ ಈ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಚೌಕುಳಿ ಕಾಗದದ ಮೇಲೆ ಚಿತ್ರಿಸಿ, ಉತ್ಪನ್ನದ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ. ಈ ನಕ್ಷೆಯು ಉತ್ಪನ್ನದ ಚಿತ್ರವನ್ನು ಕಣ್ಣಿಗೆ ಕಟ್ಟುವಂತೆ ವರ್ಣಿಸುತ್ತದೆ.

ಸಾಮಾನ್ಯ ವಿಚಾರಗಳಿಗೆ, xನ ಒಂದು ಬೆಲೆಗೆ yಯ ಒಂದು, ಒಂದೇ ಬೆಲೆ ಇರುವಂತಹ ಉತ್ಪನ್ನಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತೇವೆ. ಇಂಥ ಉತ್ಪನ್ನಗಳನ್ನು ಏಕಮೌಲ್ಯ ಉತ್ಪನ್ನಗಳೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಉತ್ಪನ್ನದ ಭಾವನೆಯನ್ನು ಈಗ ಗಣಸಿದ್ಧಾಂತಕ್ಕೆ ಹೊಂದಿಸೋಣ. xನ ಬೆಲೆಗಳೆಲ್ಲಾ ಒಂದು ಗಣವಾದರೆ, yಯ ಬೆಲೆಗಳು ಇನ್ನೊಂದು ಗಣವಾದರೆ, ಈ ಎರಡು ಗಣಗಳ ಅಂಶಗಳ ನಡುವೆ ಒಂದು ವಿಧದ ಏಕ–ಏಕ ಹೊಂದಾಣಿಕೆಯನ್ನು ಉತ್ಪನ್ನವು ಉಂಟುಮಾಡುತ್ತದೆ. ಎರಡು ಗಣಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ ಭಾವನೆಯನ್ನು ಗಮನಕ್ಕೆ ತಂದುಕೊಂಡು, ಈಗ ಉತ್ಪನ್ನದ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯನ್ನು ಹೊಸ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ತಿಳಿಸಬಹುದು.

ವ್ಯಾಖ್ಯೆ. T ಗಣಕ್ಕೆ S ಗಣದ* ಉತ್ಪನ್ನ F ಎಂಬುದು ಕೆಳಗಿನ

---

*ವ್ಯಾಕರಣವು ಇಲ್ಲಿ ಹೊಸತಾಗಿದೆ. ಕ್ಕೆ, ದ ಎಂಬ ಪ್ರತ್ಯಯಗಳು ಹೀಗೆಯೇ ಇರಬಹುದು. T "ಗಣಕ್ಕೆ" ಬದಲು T "ಗಣದೊಳಕ್ಕೆ" ಎಂದೂ ಹೇಳುತ್ತೇವೆ. S ಗಣದ' ಬದಲು S ಗಣದಿಂದ ಎಂದೂ ಹೇಳಬಹುದು.

a subset of $S \times T$ *with the properties :*

(a) *For each* $x \in S$, *there is a* $y \in T$ *such that* $(x, y) \in F$.

(b) *If* (x, y) *and* (x, z) *are both in* F, *then* $y = z$.

The students must note that this definition is essentially the same as the definition with which they are familiar. For every x i. e. for every element of the set S, there exists a unique element y in T. Expressed in another way, *every element of S occurs once only as the first element in the ordered pairs of F.* The notation $y = f(x)$ will hereafter be written as $(x, y) \in F$. We also read this by saying that *the image of x in F is y*. The set S is called the *domain* of F, and the set

$$F(S) = \{ y ; y \in T \text{ and } (x, y) \in F \}$$

is called the *range* or *image* of the set S in F. Instead of the word " image " the words *mapping* and *map* will also be used. Therefore *the function F determines a mapping of the set S to (or into) the set T.*

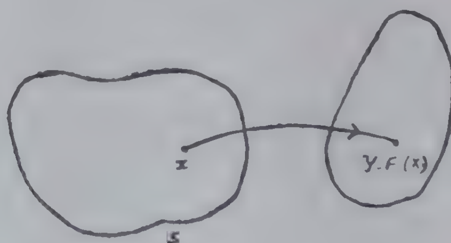


Fig. 16.

Instead of the notation $y = F(x)$, we write $y = xF$, and the function is denoted by $F : x \rightarrow xF$. This should be read thus : The function F maps the element x into its image xF.

T may not be a different set. A function which maps the set into itself is called a *transformation*.

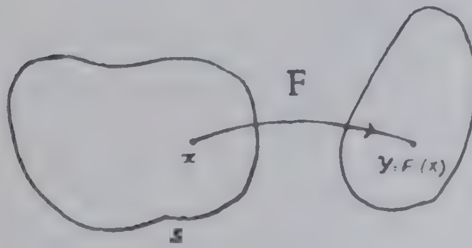
ಗುಣಗಳುಳ್ಳಂತೆ ಆರಿಸಿದ $S \times T$ ಎಂಬ ಗಣದ ಉಪಗಣ.

(1) **ಪ್ರತಿ $x \in S$ ಗೂ, ಒಂದು $y \in T$ ಇದ್ದು, $(x, y) \in F$ ಆಗಿರುವುದು.**
(2) (x, y) (x, z) **ಎರಡೂ F ನಲ್ಲಿದ್ದರೆ, $y = z$ ಆಗಿರುವುದು.**

ಈ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯೂ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಪರಿಚಯವಾಗಿರುವ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯೂ ಒಂದೇ ಎಂಬುದನ್ನು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಗ್ರಹಿಸಬೇಕು. ಪ್ರತಿ xಗೂ, ಎಂದರೆ S ಗಣದ ಪ್ರತಿ ಅಂಶಕ್ಕೂ T ಗಣದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಅಂಶ y ಇದೆ. ಬೇರೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಹೇಳುವುದಾದರೆ, Fನ ಕ್ರಮಯುಗ್ಮಗಳಲ್ಲಿ, Sನ **ಪ್ರತಿಗಣಾಂಶವೂ ಒಂದು ಸಲ ಮಾತ್ರ ಮೊದಲನೆಯ ಅಂಶವಾಗಿ ಬರುತ್ತದೆ.** $y = F(x)$ ಎಂಬ ಸಂಕೇತವನ್ನು ಇನ್ನು ಮುಂದೆ $(x, y) \in F$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. Fನಲ್ಲಿ x**ನ ಛಾಯೆ** y **ಎಂದೂ ಇದನ್ನು ಓದುತ್ತೇವೆ.** S ಗಣವನ್ನು Fನ **ಪ್ರಾಂತ** ಎಂದೂ

$$F(S) = \left\{ y;\ y \in T \text{ ಮತ್ತು } (x, y) \in F \right\}$$

ಎಂಬ ಗಣವನ್ನು Fನಲ್ಲಿ S ಗಣದ ವ್ಯಾಪ್ತಿ ಎಂದೂ ಛಾಯೆ ಎಂದೂ ಹೇಳುತ್ತೇವೆ. ಛಾಯೆ ಎಂಬ ಪದಕ್ಕೆ ಬದಲು **ಚಿತ್ರಣ, ಚಿತ್ರ, ನಕ್ಷೆ** ಎಂಬ ಪದಗಳನ್ನೂ ಉಪಯೋಗಿಸುವೆವು. ಆದ್ದರಿಂದ **T ಗಣಕ್ಕೆ S ಗಣದ ಚಿತ್ರಣವನ್ನು F ಉತ್ಪನ್ನವು ನಿರ್ಧರಿಸುತ್ತದೆ.**



ಚಿತ್ರ 1.6

$y = F(x)$ ಎಂಬ ಸಂಕೇತಕ್ಕೆ ಬದಲು, $y = x\,F$ ಎಂದೂ, ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು $F : x \rightarrow x\,F$ ಎಂದೂ ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. F ಉತ್ಪನ್ನವು x ಗಣಾಂಶವನ್ನು ಆದರ ಛಾಯೆ $x\,F$ ಗೆ ಚಿತ್ರಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದು ಇದನ್ನು ಓದಬೇಕು.

T ಗಣವು ಬೇರೆಯಲ್ಲದಿರಬಹುದು. S ಗಣವನ್ನು ತನ್ನೊಳಕ್ಕೇ ಚಿತ್ರಿಸುವ ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು **ಪರಿವರ್ತನೆ** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

A point to note. The student will have previously called as functions, equations like $y = x^2$, $y = \sin x$ and so on. There is no harm in calling like this in subjects like the calculus. But these are only *formulae* for functions, they are themselves not functions. It will be correct to say that these formulae *determine* functions. Then what are functions? According to our present definition, a function is a set. The function determined by the formula $y = x^2$ means the set of ordered pairs (x, y) having this relation. We now write this as

$$F = \{ (x, y);\ x \text{ is a number, } y = x^2 \}$$

When the elements (x, y) that occur in the set F i. e. in the function are numbers, they can be marked as points referred to a pair of axes, as in analytical geometry, (x, y) being the coordinates. The aggregate of these points is the function. In the case of simple functions, this aggregate of points forms a curve or a straight line. This is possible only when x, y are numbers. The following examples will clarify the new conception that we have given to functions.

(1) $F = \{ (1, 2) \}$. This too is a function. There is only one element. The domain i. e. the set S is $\{ 1 \}$, the range or the set T is $\{ 2 \}$.

(2) $F = \{ (0, 1), (1, 1) \}$ The domain of this function is $\{ 0, 1 \}$, the range is $\{ 1 \}$.

(3) $F = \{ (1, 0), (1, 1) \}$. This is not a function. According to definition, any element of the set S can occur only once. But here the element 1 has occurred twice.

ಒಂದು ವಿಚಾರ. ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯು ಹಿಂದೆ ಕಲಿತಿರುವ ಗಣಿತದಲ್ಲಿ $y=x^2$, $y=\sin x$ ಮುಂತಾದುವನ್ನು ಉತ್ಪನ್ನಗಳೆಂದು ಕರೆದಿರುವನು. ಕಲನಶಾಸ್ತ್ರ ಮುಂತಾದುವುಗಳಲ್ಲಿ ಹೀಗೆ ಕರೆಯುವುದರಿಂದ ತೊಂದರೆಯಿಲ್ಲ. ಆದರೆ ಇವು ಉತ್ಪನ್ನಗಳಿಗೆ ಸೂತ್ರಗಳು ಮಾತ್ರ, ಇವುಗಳೇ ಉತ್ಪನ್ನಗಳಲ್ಲ. ಈ ಸೂತ್ರಗಳು ಉತ್ಪನ್ನಗಳನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸುತ್ತವೆ ಎಂದು ಹೇಳುವುದು ಸರಿ. ಹಾಗಾದರೆ ಉತ್ಪನ್ನಗಳು ಯಾವುವು? ನಮ್ಮ ಈಗಿನ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯ ಪ್ರಕಾರ, ಉತ್ಪನ್ನ ಎಂಬುದು ಒಂದು ಗಣ. $y=x^2$ ಸೂತ್ರವು ನಿರ್ಧರಿಸುವ ಉತ್ಪನ್ನ ಎಂದರೆ ಈ ಸಂಬಂಧವುಳ್ಳ ಕ್ರಮಯುಗ್ಮ (x, y)ಗಳ ಗಣ. ಇದನ್ನು ಈಗ

$$F = \left\{ (x, y) ; x \text{ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆ}, y=x^2 \right\}$$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು, ಎಂದರೆ F ಗಣದಲ್ಲಿರುವ (x, y) ಗಣಾಂಶಗಳನ್ನು ಇವು ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿದ್ದರೆ ಇವನ್ನು ನಿರ್ದೇಶಕಗಳೆಂದು ಭಾವಿಸಿ ಬೀಜರೇಖಾಕ್ರಮವನ್ನನುಸರಿಸಿ, ಎರಡು ಅಕ್ಷರೇಖೆಗಳನ್ನು ಕುರಿತು ಈ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳುಳ್ಳ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರ್ತಿಸಬಹುದು. ಈ ಬಿಂದುಗಳ ಸಮುದಾಯವೇ ಉತ್ಪನ್ನ. ಸಾಮಾನ್ಯವಾದ ಉತ್ಪನ್ನಗಳಿಗೆ ಈ ಬಿಂದು ಸಮುದಾಯವು ಒಂದು ರೇಖೆ (ಸರಳ ಅಥವಾ ವಕ್ರ) ಯನ್ನು ಕೊಡುತ್ತದೆ. x y ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದಾಗ ಮಾತ್ರ ಇದು ಸಾಧ್ಯ. ಕೆಳಗೆ (10)ನೇ ಉದಾಹರಣೆ ನೋಡಿ. ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳು ಉತ್ಪನ್ನಗಳಿಗೆ ನಾವು ಕೊಟ್ಟಿರುವ ನವೀನ ಭಾವನೆಯನ್ನು ಸ್ಪಷ್ಟಗೊಳಿಸುವುವು: —

(1) $F = \left\{ (1, 2) \right\}$ ಇದೂ ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನ. ಒಂದೇ ಒಂದು ಅಂಶವಿದೆ.

ಪ್ರಾಂತ ಎಂದರೆ S ಗಣ $\left\{ 1 \right\}$, ವ್ಯಾಪ್ತಿ ಎಂದರೆ T ಗಣ $\left\{ 2 \right\}$.

(2) $F = \left\{ (0, 1), (1, 1) \right\}$

ಈ ಉತ್ಪನ್ನದ ಪ್ರಾಂತ $= \left\{ 0, 1 \right\}$, ವ್ಯಾಪ್ತಿ $= \left\{ 1 \right\}$.

(3) $F = \left\{ (1, 0), (1, 1) \right\}$. ಇದು ಉತ್ಪನ್ನವಲ್ಲ. ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯ ಪ್ರಕಾರ,

S ಗಣದ ಯಾವುದೇ ಅಂಶವು ಒಂದೇ ಸಲ ಬರಬೇಕು. ಇಲ್ಲಿ 1 ಎಂಬ ಅಂಶವು ಎರಡು ಸಲ ಬಂದಿದೆ.

(4) $F = \{(0, 1), (1, 0), (2, 1)\}$ The domain of this function is $\{0, 1, 2\}$, the range is $\{0, 1\}$

(5) Let a function map the point a into p, the point b into q. the point c into r, and the point d into p. The function is therefore $F = \{(a, p), (b, q), (c, r), (d, p)\}$

(6) $S = \{a, b, c\}, T = \{x, y\}$

The set $F = \{(a, x), (b, x), (c, x)\}$ is a function which maps S into T. The set $F(S)$ contains a single element x. The element y of T is not the image of any element of the set S.

(7) The function $F = \{(a, b), (b, c)\ (c, a,)\}$'s a function which maps the set $\{a, b, c\}$ on itself.

(8) C is any circle and a its area. Let A denote the function having the ordered pairs (C, a). In other words,

$A = \{(C, a);\ C = \text{any circle, } a \text{ its area.}\}$

The domain of this province is the set of all circles, the range the set of all positive numbers.

(9) Similarly for the function

$A = \{(C, r),\ C = \text{any circle, } r \text{ its radius}\}$

(10) S is the set of students in the college, whose mothers are alive. T is the set of all women in the world.

$F = \{(x, y);\ x \in S, y \in T, y \text{ is the mother of } x\}$

Such functions cannot be mapped by co-ordinates.

(4) $F = \{ (0, 1), (1, 0), (2, 1 \}$

ಉತ್ಪನ್ನದ ಪ್ರಾಂತ $= \{ 0, 1, 2 \}$, ವ್ಯಾಪ್ತಿ $= \{ 0, 1 \}$

(5) ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನವು a ಬಿಂದುವನ್ನು p ಗೂ, b ಬಿಂದುವನ್ನು q ಗೂ, c ಬಿಂದುವನ್ನು r ಗೂ, d ಬಿಂದುವನ್ನು p ಗೂ ಚಿತ್ರಿಸುತ್ತದೆ. ಆದುದರಿಂದ ಉತ್ಪನ್ನ $F = \{ (a, p), (b, q), (c, r), (d, p) \}$

(6) $S = \{ a, b, c \}, T = \{ x, y \}$.

$F = \{ (a, x), (b, x), (c, x) \}$ ಎಂಬ ಗಣವು S ನ್ನು T ಒಳಕ್ಕೆ ಚಿತ್ರಿಸುವ ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನ. $F(S)$ ಗಣವು $\{ x \}$ ಎಂಬ ಏಕಾಂಶವುಳ್ಳ ಗಣ. y ಎಂಬ T ಅಂಶವು S ಗಣದ ಯಾವ ಅಂಶದ ಛಾಯೆಯೂ ಅಲ್ಲ.

(7) $F = \{ (a, b), (b, c), (c, a) \}$ ಎಂಬ ಉತ್ಪನ್ನವು $\{ a, b, c \}$ ಗಣವನ್ನು ತನ್ನ ಮೇಲೆಯೇ ಚಿತ್ರಿಸುತ್ತದೆ.

(8) C ಯಾವುದೇ ವೃತ್ತ, a ಅದರ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ. (C, a) ಕ್ರಮಯುಗ್ಮಗಳುಳ್ಳ ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು A ಎಂದು ಕರೆಯೋಣ. ಎಂದರೆ

$A = \{ (C, a)$; C = ಒಂದು ವೃತ್ತ, a ಅದರ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ $\}$

ಈ ಉತ್ಪನ್ನದ ಪ್ರಾಂತ = ಎಲ್ಲಾ ವೃತ್ತಗಳ ಗಣ ; ವ್ಯಾಪ್ತಿ = ಎಲ್ಲಾ ಧನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣ.

(9) ಹೀಗೆಯೇ $A = \{ (C, r)$; C = ಒಂದು ವೃತ್ತ, r ಅದರ ತ್ರಿಜ್ಯ $\}$

(10) S ಎಂಬುದು ಕಾಲೇಜಿನಲ್ಲಿ, ತಾಯಂದಿರಿರುವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಗಣ, T ಪ್ರಪಂಚದಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲ ಸ್ತ್ರೀಯರ ಗಣ.

$F = \{ (x, y);\ x \in S,\ \ y \in T,\ y = x$ ನ ತಾಯಿ $\}$

ಇಂಥ ಉತ್ಪನ್ನಗಳನ್ನು ನಿರ್ದೇಶಕಗಳಿಂದ ಚಿತ್ರಿಸಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ.

1.9 Into, onto. Consider again the definition of a function F of a set S to a set F. Every element of T may or may not be the image of an element of S. If *every* element of T is the image of some element of S, we say that the mapping maps S *onto* T; otherwise S is mapped *into* T. Moreover an element of T may be an image of two or more elements of S, or may be an image of a single element.

If every element of T is the image of one and only one element of S, there exists a one-to-one correspondence between the S-elements and the T-elements. In such a case, S, T are said to be *equivalent sets*. In this case, we can also map T onto S. If F is the function which maps S onto T, the corresponding function which maps T onto S will be denoted by F^{-1}. For every $(x, y) \in F$ we have $(y, x) \in F^{-1}$. The function F^{-1} is the *inverse* of the function F. In order that the inverse exists, S and T should be equivalent sets.

In the examples given above, (7), (8), (9) are onto mappings, the mapping in (10) is into.

Ex. (11). $S = \{a, b, c\}$, $T = \{x, y, z\}$ are two sets. The

function $F = \{(a, z), (b, y), (c, x)$ maps S onto T. Its inverse is

$$F^{\cdot} = \{(z, a), (y, b), (x, c)\}.$$

If the inverse is taken of this function, the two inverses cancel each other, and we arrive at the original state of affairs, This means

$$(a\,F)\,F^{-1} = zF^{-1} = a, \quad (x\,F^{-1})\,F = cF = x, \text{ and so on}$$

1.9 ಒಳಕ್ಕೆ, ಮೇಲಕ್ಕೆ. S ಗಣವನ್ನು T ಗಣಕ್ಕೆ ಚಿತ್ರಿಸುವ ಉತ್ಪನ್ನದ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯನ್ನು ಮತ್ತೊಮ್ಮೆ ಗಮನಿಸಿ. S ಗಣದ ಯಾವುದೇ ಅಂಶ xಗೆ ಛಾಯೆಯಾಗಿ Tನಲ್ಲಿ y ಅಂಶವಿದ್ದರೆ, $\left\{(x, y)\right\}$ ಗಣವೇ ಉತ್ಪನ್ನ F. ಆದರೆ Tಗಣದ ಪ್ರತಿ ಅಂಶವೂ Sನ ಯಾವುದೇ ಅಂಶದ ಛಾಯೆಯಾಗಿ ಇರಬಹುದು, ಇಲ್ಲದಿರಬಹುದು. T ಗಣದ ಪ್ರತಿ ಅಂಶವೂ Sನ ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಅಂಶದ ಛಾಯೆಯಾಗಿದ್ದರೆ, ಚಿತ್ರಣವು Sನ್ನು Tಯ **ಮೇಲಕ್ಕೆ** ಚಿತ್ರಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದೂ, ಹೀಗಿಲ್ಲದಿದ್ದರೆ Sನ್ನು Tಯ **ಒಳಕ್ಕೆ** ಚಿತ್ರಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದೂ ಹೇಳುತ್ತೇವೆ. ಮತ್ತು T ಗಣದ ಅಂಶವು S ಗಣದ ಎರಡು ಮೂರು ಅಂಶಗಳ ಛಾಯೆಯಾಗಿರಬಹುದು, ಅಥವಾ ಒಂದೇ ಅಂಶದ ಛಾಯೆಯಾಗಿರಬಹುದು.

ಪ್ರತಿ T ಅಂಶವೂ Sನ ಒಂದು ಅಂಶದ, ಒಂದೇ ಒಂದು ಅಂಶದ ಛಾಯೆಯಾಗಿದ್ದರೆ, S– ಅಂಶಗಳಿಗೂ T- ಅಂಶಗಳಿಗೂ ಏಕಏಕ ಹೊಂದಾಣಿಕೆ ಇರುತ್ತದೆ. ಇಂಥ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ, S, T ಗಳನ್ನು **ಸಮಾನಗಣಗಳು** ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ, ನಾವು T ಗಣವನ್ನು S ಮೇಲಕ್ಕೆ ಸಹ ಚಿತ್ರಿಸಬಹುದು. Sನ್ನು Tಯಮೇಲಕ್ಕೆ ಚಿತ್ರಿಸುವ ಉತ್ಪನ್ನ F ಆದರೆ, Tಯನ್ನು S ಮೇಲೆ ಚಿತ್ರಿಸುವ ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು F^{-1} ಎಂದು ಬರೆಯುವೆವು. ಪ್ರತಿ $(x, y) \in F$ ಗೆ $(y, x) \in F^{-1}$ ಆಗಿದೆ. F^{-1} ಉತ್ಪನ್ನವು F ಉತ್ಪನ್ನದ **ಪ್ರತಿಲೋಮ.** ಪ್ರತಿಲೋಮವಿರಲು, S, T ಸಮಾನಗಣಗಳಾಗಿರಬೇಕು.

ಮೇಲೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ (7), (8), (9)ರಲ್ಲಿ ಚಿತ್ರಣವು ಮೇಲಕ್ಕೆ, (10) ರಲ್ಲಿ ಚಿತ್ರಣವು ಒಳಕ್ಕೆ.

ಉದಾ: (11). $S \equiv \left\{a, b, c\right\}$, $T \equiv \left\{x, y, z\right\}$ ಎರಡು ಗಣಗಳು.

$F = \left\{(a, z), (b, y), (c, x)\right\}$ ಎಂಬ ಉತ್ಪನ್ನವು S ನ್ನು T ಯ ಮೇಲಕ್ಕೆ ಚಿತ್ರಿಸುತ್ತದೆ. ಇದರ ಪ್ರತಿಲೋಮ,

$$F^{-1} = \left\{(z, a), (y, b), (x, c)\right\}$$

ಈ ಉತ್ಪನ್ನದ ಮೇಲೆ ಪ್ರತಿಲೋಮವನ್ನು ಪ್ರಯೋಗಿಸಿದರೆ, ಒಂದನ್ನೊಂದು ಹೊಡೆದುಹಾಕಿ, ಪೂರ್ವದ ಸ್ಥಿತಿ ಬರುತ್ತದೆ. ಎಂದರೆ

$(a F) F^{-1} = z F^{-1} = a$, $(x F^{-1}) F = c F = x$ ಇತ್ಯಾದಿ.

1.10 Theorem. *Let F and G be two functions with the same domain. Let this domain be the set S. If for every $s \in S$, we have $s\,F = s\,G$, then $F = G$.*

Proof. Let the function F be the set $\{(s, t)\}$. Therefore, if $s \in S$, $s\,F = t$. Since the two functions have the same domain, s is in the domain of G also. Therefore there exists an element r in the range of G such that $(s, r) \in G$. Since $s\,F = s\,G$, we have $r = t$. Hence $(s, t) \in G$. Therefore $F \subset G$. Similarly, we can show that $G \subset F$. Therefore $F = G$.

The consequence of this theorem is the following: To determine a function, we must know its domain, and we must know the value of the function for each element of the domain. These are sufficient. There exists one and only one function satisfying these conditions. The older notation $F(s)$ for a function makes this clear.

1.11 Composite or Product. Let the function F map S into L and let the function G map L into M. Let the domain of L include the range of F. Then the function

$$K = \{(x, z);\ x \in S,\ (x\,F, z) \in G\}$$

maps S into M. We write this as

$$x\,K = (x\,F)\,G = x\,FG.$$

In the notation used in the calculus, $K(x) = C\{F(x)\}$ is a function of a function. The function K is called the *Composite or product* of F and G.

Exercise 1.2

1 The mapping (or function) α maps the set of real numbers on itself through the equation $y = 3x^2 - 2$. What are the values of (i) 2α (ii) $\frac{1}{2}\alpha$ (iii) $\left\{t + \frac{1}{t}\right\}\alpha$?

1.10 **ಪ್ರಮೇಯ.** F ಮತ್ತು G ಎಂಬ ಎರಡು ಉತ್ಪನ್ನಗಳು ಒಂದೇ ಪ್ರಾಂತವನ್ನು ಹೊಂದಿರಲಿ. ಈ ಪ್ರಾಂತವನ್ನು S ಗಣವೆಂದು ಕರೆಯೋಣ ಪ್ರತಿ $s \in S$ ಗೂ $s\,F = s\,G$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $F = G$.

ಸಾಧನೆ. F ಉತ್ಪನ್ನವು $\left\{ (s, t) \right\}$ ಗಣವಾಗಿರಲಿ. ಎಂದರೆ $s \in S$, $sF = t$. ಎರಡು ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ಪ್ರಾಂತವು ಒಂದೇ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, s, G ಯ ಪ್ರಾಂತದಲ್ಲೂ ಇದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $(s, r) \in G$ ಆಗಿರುವ ಹಾಗೆ G ಯ ವ್ಯಾಪ್ತಿಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಅಂಶ r ಇರುತ್ತದೆ. $s\,F = s\,G$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ $(s, t) = (s, r)$. ಆದ್ದರಿಂದ $r = t$ ಎಂದರೆ $(s, t) \in G$. ಆದ್ದರಿಂದ $F \subset G$. F, G ಗಳನ್ನು ಬದಲಿಸುವುದರಿಂದ, $G \subset F$. ಆದ್ದರಿಂದ $F = G$.

ಈ ಪ್ರಮೇಯದ ಫಲಿತಾಂಶ ಇಷ್ಟು: ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಲು ಅದರ ಪ್ರಾಂತವನ್ನು ತಿಳಿಯಬೇಕು, ಪ್ರಾಂತದ ಪ್ರತಿ ಅಂಶಕ್ಕೂ ಉತ್ಪನ್ನದ ಬೆಲೆ ಏನು ಎಂದು ತಿಳಿಯಬೇಕು. ಇವು ತಿಳಿದರೆ ಸಾಕು, ಈ ಒಕ್ಕಣೆಗಳನ್ನು ಸರಿದೂಗಿಸುವ ಒಂದೇ ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನವಿರುತ್ತದೆ. ಉತ್ಪನ್ನದ ಹಳೆಯ ಸಂಕೇತ $F(s)$ ಇದನ್ನೇ ಸ್ಪಷ್ಟಪಡಿಸುತ್ತದೆ.

1.11 **ಸಮಾಸ ಅಥವಾ ಗುಣಲಬ್ಧ.** F ಉತ್ಪನ್ನವು S ಗಣದಿಂದ T ಗೆ ಚಿತ್ರಿಸಲಿ, G ಉತ್ಪನ್ನವು L ಗಣದಿಂದ Mಗೆ ಚಿತ್ರಿಸಲಿ. L ಗಣದ ಪ್ರಾಂತವು Fನ ವ್ಯಾಪ್ತಿಯನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿರಲಿ. ಈಗ

$$K = \left\{ (x, z) : x \in S \text{ ಮತ್ತು } (x\,F, z) \in G \right\}$$

ಎಂಬ ಉತ್ಪನ್ನವು S ನಿಂದ Mಗೆ ಚಿತ್ರಿಸುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನು

$x\,K = (xF)G = x\,FG$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಕಲನಶಾಸ್ತ್ರದ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ $K(x) = G(F(x))$, ಉತ್ಪನ್ನದ ಉತ್ಪನ್ನ ಎಂದು ತಿಳಿಸುತ್ತೇವೆ. K ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು F, Gಗಳ ಸಮಾಸ ಅಥವಾ F, Gಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ 1.2

1 α ಎಂಬ ಚಿತ್ರಣವು (ಅಥವಾ ಉತ್ಪನ್ನವು) ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣದ ಮೇಲೆ $y = 3x^2 - 2$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಕ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನೇ ಚಿತ್ರಿಸುತ್ತದೆ. ಇವುಗಳ ಬೆಲೆಗಳೇನು? (i) 2α (ii) $\frac{1}{2}\alpha$ (iii) $(t + \frac{1}{t})\alpha$

2 In the following sets of ordered pairs, which are functions, and which are not? Assume that $a \neq b \neq c$

(1) $\{(a, 1), (b, 2), (c, 2)\}$

(2) $\{(a, 0), (b, 0)\}$

(3) $\{(1, a), (1, b), (1, c)\}$

(4) $\{(1, b), (2, c), (3, a)\}$

3 In the following sets of ordered pairs, which are functions and which are not?

(1) $\{(x, y);\ x, y \text{ are numbers}, y = x^2\}$

(2) $\{(x, y);\ x, y \text{ are numbers}, x = y^2\}$

(3) $\{(x, y);\ x, y \text{ are numbers}, x^2 + y^2 = 1\}$

4 Mention the domain and the range for the following functions :

(1) $f = \{(x, y);\ x \text{ is any real number}, y = x^2\}$

(2) $f = \{(x, y);\ x \text{ is a natural number}, y = x^2\}$

(3) $f = \{(x, y);\ x \text{ is an integer}, y = 2x\}$

5 S and T are the sets $\{1, 2, 3,\}$ $\{4, 5\}$ respectively.

How many functions are there from S into T, how many from S onto T? What are the functions which have one-to-one correspondence?

6 When will the (1) union (2) intersection of two functions be a function? Give examples.

2 ಕೆಳಗಿನ ಕ್ರಮಯುಗ್ಮಗಳ ಗಣಗಳಲ್ಲಿಯ ಯಾವುವು ಉತ್ಪನ್ನಗಳು ಯಾವುವು ಅಲ್ಲ ? $a \neq b \neq c$ ಎಂದು ಭಾವಿಸಿ.

(1) $\{ (a, 1)\ (b, 2)\ (c, 2) \}$

(2) $\{ (a, 0),\ (b, 0) \}$

(3) $\{ (1, a)\ (1, b)\ (1, c) \}$

(4) $\{ (1, b)\ (2, c)\ (3, a) \}$

3 ಕೆಳಗಿನ ಕ್ರಮಯುಗ್ಮಗಳ ಗಣಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುವು ಉತ್ಪನ್ನಗಳು ಯಾವುವು ಅಲ್ಲ ?

(1) $\{ (x, y);\ x, y$ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು, $y = x^2 \}$

(2) $\{ (x, y);\ x, y$ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು, $x = y^2 \}$

(3) $\{ (x, y);\ x, y$ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು, $x^2 + y^2 = 1 \}$

4 ಕೆಳಗಿನ ಉತ್ಪನ್ನಗಳಿಗೆ ಪ್ರಾಂತವನ್ನೂ ವ್ಯಾಪ್ತಿಯನ್ನೂ ತಿಳಿಸಿ.

(1) $f = \{ (x, y);\ x$ ಯಾವುದೇ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆ, $y = x^2 \}$

(2) $f = \{ (x, y);\ x$ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ, $y = x^2 \}$

(3) $f = \{ (x, y);\ x$ ಪೂರ್ಣಾಂಕ, $y = 2x \}$

5 $S = \{ 1, 2, 3 \}$ $T = \{ 4, 5 \}$ ಗಣಗಳು. S ನಿಂದ T ಒಳಕ್ಕೆ ಎಷ್ಟು ಉತ್ಪನ್ನಗಳಿವೆ, S ನಿಂದ T ಮೇಲಕ್ಕೆ ಎಷ್ಟು ಉತ್ಪನ್ನಗಳಿವೆ ? ಏಕ-ಏಕ ಹೊಂದಾಣಿಕೆ ಇರುವ ಉತ್ಪನ್ನಗಳಾವುವು ?

6 ಯಾವ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಎರಡು ಉತ್ಪನ್ನಗಳ (1) ಸಂಯೋಗವು (2) ಛೇದನವು ಉತ್ಪನ್ನವಾಗುತ್ತದೆ ? ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಕೊಡಿರಿ.

7 The mapping $I = \left\{ (x, y) \, ; \, x \in S, \, x = y \right\}$ is called the identity mapping. If F is any other mapping on S, prove that $F. I$ or $F(I) = I(F) = F$.

8 Let F^{-1} be the inverse of the mapping from S onto T. Prove that the inverse of F^{-1} is F i.e. $(F^{-1})^{-1} = F$.

9 Write down all the subsets of a finite set. These include the given set and the null set. The set of these subsets is called the *Power set*, and the number of elements in the power set is called the *power* of the given set. Prove that the power of the set $\left\{ a_1, \, a_2, \cdots, a_n \right\}$ is 2^n.

[This is a problem on the theory of combinations. To construct a subset we may include a_1 or exclude it. Hence a_1 can be disposed of in two ways; similarly every element. $\therefore$ power $= 2 \times 2 \times 2 \times \ldots \times 2 = 2^n$].

10 Two enumerable sets can be mapped one upon the other. Map the set of odd numbers on the set of natural numbers.



7 $I = \left\{ (x, y), x \in S, x = y \right\}$ ಎಂಬ ಚಿತ್ರಣವನ್ನು ಐಕ್ಯತೆಯ ಚಿತ್ರಣವೆನ್ನುವೆವು. Sಇಂದ F ಬೇರೆ ಯಾವುದಾದರೂ ಚಿತ್ರಣವಾದರೆ, F I ಅಥವಾ $F(I) = I(F) = F$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

8 Sನಿಂದ T ಮೇಲಕ್ಕೆ ಇರುವ F ಚಿತ್ರಣದ ಪ್ರತಿಲೋಮವು F^{-1} ಆಗಿರಲಿ. F^{-1}ನ ಪ್ರತಿಲೋಮ F ಎಂದು ತೋರಿಸಿ. ಎಂದರೆ $(F^{-1})^{-1} = F$.

9 ಒಂದು ಪರ್ಯಾಪ್ತಗಣದ ಎಲ್ಲಾ ಉಪಗಣಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ. ಈ ಉಪಗಣ ಗಳಲ್ಲಿ ದತ್ತಗಣವೂ ಶೂನ್ಯಗಣವೂ ಸೇರುತ್ತದೆ. ಈ ಉಪಗಣಗಳ ಗಣವನ್ನು ಘಾತಗಣ ಎಂದೂ, ಘಾತಗಣದ ಅಂಶಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ದತ್ತಗಣದ ಘಾತ ವೆಂದೂ ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. $\left\{ a_1, a_2, \quad , a_n \right\}$ ಗಣದ ಘಾತ 2^n ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

[ಇದು ವಿಕಲ್ಪ ಗಣಿತದ ಒಂದು ಲೆಕ್ಕ. ಒಂದು ಉಪಗಣವನ್ನು ರಚಿಸಲು, a_1ನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬಹುದು ಅಥವಾ ಬಿಟ್ಟುಬಿಡಬಹುದು. ಎಂದರೆ a_1ನ್ನು ಎರಡು ವಿಧದಲ್ಲಿ ವಿನಿಯೋಗಿಸಬಹುದು, ಹೀಗೆಯೇ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅಂಶಕ್ಕೂ. $\therefore$ ಘಾತ $2 \times 2 \times 2 \times \quad \times 2 = 2$]

10 ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಯ ಗಣಗಳನ್ನು ಒಂದನ್ನು ಒಂದರಮೇಲೆ ಚಿತ್ರಿಸಬಹುದು. ವಿಷಮ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣವನ್ನು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯಾಗಣದಮೇಲೆ ಚಿತ್ರಿಸಿ.

CHAPTER 2

The Logical Development of the Number System

2.1 The study of mathematics commences with the assumption that numbers like 1, 2, 3 . . . are natural or God-given. Nobody asks, what is one ? What is two ? In fact at this stage, no answer will be available. If a, b are two natural numbers, we conceive through our intuition the properties $a+b=b+a$, and $ab=ba$, and accept their truth. After the natural numbers and their easy properties are accepted, arithmetic begins to develop. In order to make the processes of addition and of division applicable to all natural numbers, negative numbers, zero and fractions were invented. The student knows details about all this, which have been briefly narrated in the *The Pre-University Mathematics*. The aggregate of all these numbers has been called the rational number system. It was found further that these numbers are not sufficient for our needs, and a brief introduction was given about irrational numbers. We have called all these numbers as real numbers.

But is it necessary to relegate the natural numbers to our intuition? Is it not possible to adapt properties like $a+b=b+a$ so as to be capable of proof ? The student commences his study of geometry with certain axioms and postulates, and has made a brief study of the logical development of geometry. Modern mathematical methods have demonstrated that it is possible in like manner to base arithmetic and algebra on the foundations of a set of axioms. How many axioms are needed in order that all the rest follow as properties or theorems is a some what difficult question. " What are the axioms " ? also admits of several answers. What is taken as an axiom in one

ಅಧ್ಯಾಯ 2

ಸಂಖ್ಯಾವ್ಯೂಹದ ತಾರ್ಕಿಕ ಬೆಳವಣಿಗೆ

2.1 ಗಣಿತದ ಅಭ್ಯಾಸವನ್ನು ಆರಂಭಿಸುವಾಗ ಒಂದು, ಎರಡು, ಮೂರು ಮುಂತಾದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಅಥವಾ ದೈವದತ್ತ ಎಂದು ಭಾವಿಸುತ್ತೇವೆ. ಒಂದು ಎಂದರೇನು, ಎರಡು ಎಂದರೇನು ಎಂಬುದಾಗಿ ಪ್ರಶ್ನಿಸುವುದಿಲ್ಲ, ಆ ಮಟ್ಟದಲ್ಲಿ ಪ್ರಶ್ನೆಗೆ ಉತ್ತರವೂ ದೊರಕುವುದಿಲ್ಲ. a, b ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದರೆ, $a+b=b+a$ ಮತ್ತು $ab=ba$ ಎಂಬ ಗುಣಗಳನ್ನು ನಮ್ಮ ಅಂತರ್ಬೋಧೆಯಿಂದ ಗ್ರಹಿಸಿ ಅವುಗಳ ನಿಜತ್ವವನ್ನು ಒಪ್ಪಿಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ. ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನೂ ಅವುಗಳ ಸುಲಭ ಗುಣಗಳನ್ನೂ ಒಪ್ಪಿಕೊಂಡಮೇಲೆ ಅಂಕಗಣಿತವು ಬೆಳೆದುಬರುತ್ತದೆ. ಸಂಕಲನ ಮತ್ತು ಭಾಗಹಾರ ಕ್ರಿಯೆಗಳನ್ನು ಎಲ್ಲ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೂ ಅನ್ವಯಿಸುವಂತೆ ಮಾಡುವುದಕ್ಕಾಗಿ ಋಣಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನೂ, ಶೂನ್ಯ ಅಥವಾ ಸೊನ್ನೆಯನ್ನೂ, ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳನ್ನೂ ಸೃಷ್ಟಿಮಾಡಿದ ವಿವರಗಳು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗೆ ತಿಳಿದಿವೆ. ಪ್ರೀಯೂನಿವರ್ಸಿಟಿ ತರಗತಿಯ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಈ ರೂಪದ ಬೆಳವಣಿಗೆಯನ್ನು ಸಂಕ್ಷೇಪವಾಗಿ ನಿರೂಪಿಸಲಾಗಿದೆ. ಈ ಎಲ್ಲ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನೂ ಒಟ್ಟುಗೂಡಿಸಿ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯಾವ್ಯೂಹ ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗಿದೆ. ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಮಾತ್ರವೇ ಸಾಲವು ಎಂಬುದು ನಮ್ಮ ಅನುಭವಕ್ಕೆ ಬಂದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನೂ ಪರಿಚಯಮಾಡಿಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಈ ಎಲ್ಲ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ವಾಸ್ತವ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಎಂದು ಕರೆದಿದ್ದೇವೆ.

ಆದರೆ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ನಮ್ಮ ಅಂತರ್ಬೋಧೆಗೇ ಬಿಟ್ಟುಬಿಡುವುದೇ? $a+b=b+a$ ಮುಂತಾದ ಗುಣಗಳನ್ನು ಸಾಧನೆಗೆ ಅಳವಡಿಸಲು ಆಗುವುದಿಲ್ಲವೆ ? ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯು ರೇಖಾಗಣಿತದ ಅಭ್ಯಾಸವನ್ನು ಕೆಲವು ಮೂಲಭಾವನೆಗಳು ಅಥವಾ ಸ್ವತಸ್ಸಿದ್ಧ ಪ್ರಮಾಣಗಳಿಂದ ಆರಂಭಿಸಿ ರೇಖಾಗಣಿತವನ್ನು ತಾರ್ಕಿಕವಾಗಿ ಬೆಳಸುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ತಕ್ಕಮಟ್ಟಿಗೆ ತಿಳಿದಿರುತ್ತಾನೆ. ಅದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಅಂಕಗಣಿತ, ಬೀಜ ಗಣಿತಗಳನ್ನೂ ಕೆಲವು ಸ್ವತಸ್ಸಿದ್ಧ ಪ್ರಮಾಣಗಳ ತಳಹದಿಯ ಮೇಲೆ ನಿಲ್ಲಿಸಲು ಸಾಧ್ಯ ಎಂಬುದು ಆಧುನಿಕ ಗಣಿತ ವಿಧಾನದಲ್ಲಿ ತೋರ್ಪಟ್ಟಿದೆ. ಸ್ವತಸ್ಸಿದ್ಧ ಪ್ರಮಾಣಗಳು ಎಷ್ಟಿದ್ದರೆ ಸಾಕು, ಉಳಿದ ಎಲ್ಲವನ್ನೂ ಗುಣಗಳಾಗಿ ಅಥವಾ ಪ್ರಮೇಯಗಳಾಗಿ ಪಡೆಯಲು ಸಾಧ್ಯ ಎಂಬುದು ಸ್ವಲ್ಪ ಕಠಿಣವಾದ ಪ್ರಶ್ನೆ. ಸ್ವತಸ್ಸಿದ್ಧ ಪ್ರಮಾಣಗಳು ಯಾವುವು ಎಂಬುದಕ್ಕೂ ಹಲವು ಉತ್ತರಗಳು ಸಾಧ್ಯ. ಒಂದು ವಿಧಾನದಲ್ಲಿ

method may be proved as a theorem in another method. In the light of the standard of students who use this book, the logical development of the number systems will be set forth in as simple a way as possible.

PART 1. The Natural Numbers

2.2 Definition. *We assume that the elements of a set N can be subjected to two operations called addition and multiplication, and that all the elements obey the following axioms.* The operations will be indicated by the symbols + and ● (or ×) respectively. We define the elements of the set N as *natural numbers*.

Axiom 1. The set N has a single element called the identity, and denoted by the symbol 1, such that for every $a \in N$, $a.1 = 1 \cdot a = a$.

Axiom 2. For any two elements, a and b,

$$a.\ (b+1) = a.b + a$$

Axiom 3. For any two elements a and b,

$$a + (b+1) = (a+b) + 1$$

Axiom 4. For every $a \neq 1$, there exists one and only one element b in N such that $a = b + 1$.

Axiom 5. If a and b are elements of N, one and only one of the following is true

$$a = b \text{ (i.e. } a, b \text{ are identical elements)}$$

$$a + x = b, \quad a = b + y,$$

x and y being also elements of N.

Axiom 6. If M is a subset of N and posseses the following properties :

(i) $1 \in M$ (ii) If any element k of N is in M, then $k+1$ also is in M, then $M = N$.

The last axiom may be compared with mathematical induction. In fact, mathematical induction can be deduced as a consequence of this axiom.

ಪ್ರಮಾಣವೆಂದೆನಿಸುವುದನ್ನು ಮತ್ತೊಂದು ವಿಧಾನದಲ್ಲಿ ಪ್ರಮೇಯವೆಂದು ಸಾಧಿಸಬಹುದು. ಈ ಗ್ರಂಥವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಮಟ್ಟಕ್ಕನುಗುಣವಾಗಿ ಸಂಖ್ಯಾವ್ಯೂಹಗಳ ತಾರ್ಕಿಕ ಬೆಳವಣಿಗೆಯನ್ನು ಆದಷ್ಟು ಸುಲಭವಾದ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಮುಂದಿಡುತ್ತೇವೆ.

ಭಾಗ 1. ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು

2.2 ವ್ಯಾಖ್ಯೆ. N ಎಂಬ ಒಂದು ಗಣದ ಅಂಶಗಳಮೇಲೆ ಸಂಕಲನ ಮತ್ತು ಗುಣಕಾರ ಎಂಬ ಎರಡು ಪರಿಕರ್ಮಗಳನ್ನು ಮಾಡಲು ಸಾಧ್ಯವೆಂದೂ, ಗುಣಾಂಶಗಳೆಲ್ಲವೂ ಕೆಳಗೆ ತಿಳಿಸುವ ಸ್ವತಸ್ಸಿದ್ಧಪ್ರಮಾಣಗಳಿಗೆ ವಿಧೇಯವಾಗಿವೆಯೆಂದೂ ಭಾವಿಸುತ್ತೇವೆ. ಪರಿಕರ್ಮಗಳನ್ನು $+$ ಮತ್ತು $\cdot$ (ಅಥವಾ $\times$) ಚಿಹ್ನೆಗಳಿಂದ **ತಿಳಿಸುತ್ತೇವೆ.** N ಗಣದ ಅಂಶಗಳನ್ನು **ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೆಂದು** ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸುತ್ತೇವೆ.

(ಸ್ವತಸ್ಸಿದ್ಧ) ಪ್ರಮಾಣ 1. N ಗಣದಲ್ಲಿ "ಏಕ" (ಚಿಹ್ನೆ 1) ಎಂದು ಕರೆಯಲ್ಪಟ್ಟು, ಪ್ರತಿ $a \in \mathrm{N}$ ಗೂ, $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ ಎಂಬ ಗುಣವುಳ್ಳ ಒಂದು, ಒಂದೇ ಒಂದು ಅಂಶವಿರುತ್ತದೆ.

ಪ್ರಮಾಣ 2. ಯಾವ ಎರಡು ಗುಣಾಂಶಗಳಾದ a, b ಗೂ

$$a \cdot (b+1) = (a \cdot b) + a$$

ಪ್ರಮಾಣ 3. ಯಾವ ಎರಡು ಗಣಾಂಶಗಳಾದ a, b ಗೂ

$$a + (b+1) = (a+b) + 1.$$

ಪ್ರಮಾಣ 4. ಪ್ರತಿ $a \neq 1$ ಗೂ, $a = b+1$ ಆಗುವಹಾಗೆ N ನಲ್ಲಿ ಒಂದು, ಒಂದೇ ಒಂದು ಗಣಾಂಶ b ಇರುತ್ತದೆ.

ಪ್ರಮಾಣ 5. a, b ಗಳು N ನ ಗಣಾಂಶಗಳಾದರೆ, x, y ಸಹ N ನಲ್ಲಿರುವಂತೆ, ಕೆಳಗಿನ ಮೂರು ಸಮೀಕರಣಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು, ಒಂದು ಮಾತ್ರ ನಿಜ.

$a = b$ (ಎಂದರೆ a, b ಎರಡೂ ಒಂದೇ ಗಣಾಂಶ)

$a + x = b, \quad a = b + y.$

ಪ್ರಮಾಣ 6. M ಎಂಬುದು N ನ ಉಪಗಣವಾಗಿದ್ದು ಕೆಳಗಿನ ಗುಣಗಳನ್ನು ಪಡೆದಿದ್ದರೆ

(i) $1 \in \mathrm{M}$ (ii) N ನ ಯಾವುದೇ ಅಂಶ k, M ನಲ್ಲಿದ್ದಾಗ $k+1$ ಸಹ M ನಲ್ಲಿರುವುದು, ಆಗ $\mathrm{M} = \mathrm{N}$.

Theorem 1. *The principle of mathematical induction. Let $P(n)$ be a statement regarding any natural number n. If* (i) $P(1)$ *is true, and* (ii) $P(k+1)$ *is true, whenever $P(k)$ is true, then the statement $P(n)$ is true for all natural numbers.*

Proof. Let M denote the set (or subset) of all natural numbers for which $P(n)$ is true. By hypothesis, $1 \in M$, and $k+1 \in M$ whenever $k \in M$. Hence by Axiom 6, $M = N$. This means that $P(n)$ is true for any natural number n.

2.3 Axiom 3 provides a particular case of the associative law of addition. We now prove in general,

Theorem 2. *For two given natural numbers a and b, and for any natural number n, the statement*

$P(n) : a+(b+n)=(a+b)+n$ *is true*. [The associative law of addition].

Proof. For the given a, b and for some k, let

$$a+(b+k)=(a+b)+k \quad \text{be true} \qquad (1)$$

If we show that $a+[b+(k+1)]=(a+b)+(k+1)$, then the theorem follows from Theorem 1.

Now, by axiom 3, $b+(k+1) = (b+k)+1$

$$\therefore \quad a+[b+(k+1]=a+[(b+k)+1].$$

ಕಡೆಯ ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು ಗಣಿತಾನುಮಾನದೊಡನೆ ಹೋಲಿಸಬಹುದು. ವಾಸ್ತವವಾಗಿ, ಗಣಿತಾನುಮಾನವಿಧಾನವನ್ನು ಈ ಪ್ರಮಾಣದಿಂದ ಒಂದು ಪ್ರಮೇಯು ವನ್ನಾಗಿ ಪಡೆಯಬಹುದು.

ಪ್ರಮೇಯ 1. **ಗಣಿತಾನುಮಾನದ ತತ್ವ. ಯಾವುದೇ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ n ಗೆ $P(n)$ ಎಂಬುದು ಒಂದು ಹೇಳಿಕೆಯಾಗಿರಲಿ. (i) $P(1)$ ನಿಜವಿದ್ದರೆ ಮತ್ತು (ii) $P(k)$ ನಿಜವಿದ್ದಾಗಲೆಲ್ಲಾ, $P(k+1)$ ಸಹ ನಿಜವಿದ್ದರೆ, $P(n)$ ಎಂಬ ಹೇಳಿಕೆಯು ಎಲ್ಲಾ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ ಗಳಿಗೂ ನಿಜ.**

ಸಾಧನೆ: $P(n)$ ನಿಜವಿರುವ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣ (ಉಪಗಣ) ವನ್ನು M ಎಂದು ಕರೆಯೋಣ. ದತ್ತದಂತೆ, $1 \in M$, ಮತ್ತು $k \in M$ ಆದಾಗಲೆಲ್ಲಾ, $k+1 \in M$. ಆದ್ದರಿಂದ ಪ್ರಮಾಣ 6 ರಂತೆ, $M = N$ ಎಂದರೆ ಯಾವುದೇ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ n ಗೆ, $P(n)$ ನಿಜ.

2.3 ಪ್ರಮಾಣ 3ರಲ್ಲಿ ಸಂಕಲನದ ಸಹವರ್ತನೆಯು ಒಂದು ವಿಶೇಷ ಸಂದರ್ಭ ವಿದೆ. ಈಗ, ಸಾರ್ವತ್ರಿಕವಾಗಿ

ಪ್ರಮೇಯ 2. ದತ್ತ **ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದ** a, b **ಗಳಿಗೆ ಯಾವುದೇ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ** n **ಗೆ**

$$P(n): \quad a+(b+n) = (a+b)+n$$

ಎಂಬುದು ನಿಜ. [ಸಂಕಲನದ ಸಹವರ್ತನೆ]

ಸಾಧನೆ: ದತ್ತ a, b ಗಳಿಗೂ ಯಾವುದೋ k ಗೂ,

$$a+(b+k) = (a+b)+k \text{ ಆಗಿರಲಿ.} \qquad (1)$$

ಈಗ $a+[b+(k+1)] = (a+b)+(k+1)$ ಎಂದು

ತೋರಿದರೆ, ಪ್ರಮೇಯ 1ರಿಂದ ಸಾಧನೆ ಪೂರ್ತಗೊಳ್ಳುತ್ತದೆ.

ಈಗ $b+(k+1) = (b+k)+1$, ಪ್ರಮಾಣ 3 ರಿಂದ

$$\therefore \ a+[b+(k+1)] = a+[(b+k)+1]$$

Since $b+k$ is an element of N, the right side of the above equation becomes $[a+(b+k)]+1$. (Axiom 3)

$\therefore$ By (1), this becomes $[\,(a+b) + k\,] + 1$.

But $a+b$ is an element of N. Therefore the above becomes

$(a+b) + (k+1)$. Hence we have proved

$a + [\,b + (k+1\,] = (a+b) + (k+1)$.

This means that if $P\,(k)$ is true, $P\,(k+1)$ is also true.

But by Axiom 3, $P\,(1)$ is true. The Theorem follows by Theorem 1.

2.4. Commutativity of Addition

Theorem 3. *For any element a of N, the statement*

$P\,(n)$: $a+n = n+a$ *is true for every natural number* n.

Proof. We shall first show that for every a, $a+1 = 1+a$.

Let the statement $n+1=1+n$ be called $P_1\,(n)$

Now $1+1=1+1$ i.e. $P_1\,(1)$ is true

Let $P_1\,(k)$ be true, *i.e.* $k+1=1+k$. We shall show that, $P_1\,(k+1)$ is true.

By Axiom 3, $1 + (k+1) = (1+k) + 1$

$= (k+1) + 1$.

This is $P_1\,(k+1)$

$\therefore$ If $P_1\,(k)$ is true, so is $P_1\,(k+1)$. Since $P_1\,(1)$ is true $P_1\,(n)$ is true for all n, by Theorem 1.

Next, for a given $a \in N$, and for some k,

let $P\,(k)$: $a+k = k+a$ be true.

$b+k$ ಎಂಬುದು N ಗಣದ ಒಂದು ಅಂಶವಾದ್ದರಿಂದ, ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣದ ಬಲಭಾಗವು $[a+(b+k)]+1$ ಆಗುತ್ತದೆ. (ಪ್ರಮಾಣ 3)

$\therefore$ (1) ರಿಂದ, ಇದು $[(a+b)+k]+1$ ಆಗುತ್ತದೆ.

$a+b$ ಎಂಬುದು N ಗಣದ ಅಂಶ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಮೇಲಿನದು

$(a+b)+(k+1)$ ಆಗುತ್ತದೆ, ಅಲ್ಲಿಗೆ

$a+[b+(k+1)] = (a+b)+(k+1)$ ಎಂದು

ಸಾಧಿಸಿದ್ದಾಯಿತು. ಎಂದರೆ, $P(k)$ ನಿಜವಾದರೆ, $P(k+1)$ ಸಹ ನಿಜ. ಆದರೆ, ಪ್ರಮಾಣ 3ರಂತೆ, $P(1)$ ನಿಜ. ಪ್ರಮೇಯ 1ರಿಂದ, ಸಾಧನೆ ಪೂರ್ತಿಯಾಗುತ್ತದೆ.

2.4 ಸಂಕಲನದ ಪರಿವರ್ತನೆ

ಪ್ರಮೇಯ 3. **N ಗಣದ ಯಾವುದೇ a ಗೆ,**

$P(n)$: $a+n=n+a$

ಎಂಬುದು ಪ್ರತಿ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ n ಗೂ ನಿಜ

ಸಾಧನೆ : ಮೊದಲು ಪ್ರತಿ a ಗೂ, $a+1=1+a$ ಎಂದು ತೋರಿಸೋಣ.

$n+1=1+n$ ಎಂಬುದನ್ನು $P_1(n)$ ಎಂದು ಕರೆಯೋಣ.

ಈಗ $1+1=1+1$, ಎಂದರೆ $P_1(1)$ ನಿಜ.

$P_1(k)$ ನಿಜವಾಗಿರಲಿ. ಎಂದರೆ $k+1=1+k$.

$P_1(k+1)$ ನಿಜ ಎಂದು ತೋರಿಸುವೆವು.

ಪ್ರಮಾಣ 3ರಿಂದ, $1+(k+1)=(1+k)+1=(k+1)+1$

ಇದೇ $P_1(k+1)$.

ಆದ್ದರಿಂದ, $P_1(k)$ ನಿಜವಿದ್ದರೆ, $P_1(k+1)$ ನಿಜ.

$P_1(1)$ ನಿಜವಾದ್ದರಿಂದ, ಪ್ರಮೇಯ 1 ರಂತೆ, ಎಲ್ಲಾ n ಗೂ $P_1(n)$ ನಿಜ ಎಂದು ತೋರಿಸಿದ್ದಾಯಿತು.

ಇನ್ನು, ದತ್ತ $a \in N$ ಗೆ, ಯಾವುದೋ k ಗೆ

$P(k)$: $a+k=k+a$ ನಿಜವಿರಲಿ.

$$\begin{aligned} \text{Now } a+(k+1) &= (a+k)+1, \quad \text{by Theorem 2} \\ &= (k+a)+1 \\ &= k+(a+1) \\ &= k+(1+a) \quad \text{by } P_1\ (a) \\ &= (k+1)+a, \quad \text{by Theorem 2} \end{aligned}$$

Thus if $P(k)$ is true, $P(k+1)$ is also true. The proof is completed by induction.

2.5 Before we establish the associative and commutative laws for multiplication, we have to establish the following distributive law.

Theorem 4. *For any elements* a, b, c *of* N,

$$a.(b+c) = (a.b) + (a.c)$$

Proof. Let $P(n)$ be the statement

$a.(b+n) = (a.b) + (a.n)$

By Axioms 1 and 2, $P(1)$ is true. Let $P(k)$ be true for some k.

$$\begin{aligned} \text{Now, } a.[b+(k+1)] &= a.[(b+k)+1], \quad \text{Axiom 3} \\ &= [a.(b+k)]+a, \text{ Axiom 2} \\ &= [(a.b)+(a.k)]+a, \text{ by } P(k) \\ &= (a.b)+[(a.k)+a], \text{ by Theorem 2} \\ &= (a.b)+[(a.(k+1)], \text{ Axiom 2} \end{aligned}$$

Hence $P(k+1)$ is true. The theorem follows by induction. This is the *left distributive law*. Similarly we have the right distributive law, given by

ಈಗ $a+(k+1) = (a+k)+1$, ಪ್ರಮೇಯ 2ರಿಂದ

$$= (k+a)+1$$
$$= k+(a+1)$$
$$= k+(1+a) \qquad P_1(a) \text{ ಇಂದ}$$
$$= (k+1)+a \qquad \text{ಪ್ರಮೇಯ 2}$$

ಅಲ್ಲಿಗೆ, $P(k)$ ನಿಜವಾದರೆ, $P(k+1)$ ಸಹ ನಿಜ ಎಂದಾಯಿತು. ಗಣಿತಾನುಮಾನದಿಂದ, ಸಾಧನೆ ಪೂರ್ತಿಗೊಳ್ಳುತ್ತದೆ.

2.5 ಗುಣಾಕಾರಕ್ಕೆ ಸಹವರ್ತನ ಪರಿವರ್ತನ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸುವ ಮುನ್ನ, ಕೆಳಗಿನ ವಿಭಾಜಕ ನಿಯಮವನ್ನು ಸಾಧಿಸುವೆವು.

ಪ್ರಮೇಯ 4. N ನ **ಯಾವುದೇ** a, b, c **ಗಣಾಂಶಗಳಿಗೆ**

$$a\cdot(b+c) = (a\cdot b)+(a\cdot c).$$

ಸಾಧನೆ :

$a\cdot(b+n) = (a\cdot b)+(a\cdot n)$ ಎಂಬುದನ್ನು $P(n)$ ಎಂದು ಕರೆಯೋಣ. ಪ್ರಮಾಣ 1 ಮತ್ತು 2ರಿಂದ, $P(1)$ ನಿಜ. ಯಾವುದೋ k ಗೆ $P(k)$ ನಿಜವಿರಲಿ. ಈಗ

$$a\cdot[b+(k+1)] = a\cdot[(b+k)+1]: \qquad \text{ಪ್ರಮಾಣ 3}$$
$$= [a\cdot(b+k)]+a: \qquad \text{ಪ್ರಮಾಣ 2}$$
$$= [(a\cdot b)+(a\cdot k)]+a: \qquad P(k) \text{ ಇಂದ}$$
$$= (a\cdot b)+[(a\cdot k)+a]: \qquad \text{ಪ್ರಮೇಯ 2}$$
$$= (a\cdot b)+[a\cdot(k+1)]: \qquad \text{ಪ್ರಮಾಣ 2}$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $P(k+1)$ ನಿಜವೆಂದು ಸಾಧಿತವಾಯಿತು.

ಗಣಿತಾನುಮಾನದಿಂದ, ಪ್ರಮೇಯ 4 ಸಾಧಿತವಾಯಿತು. ಇದು **ಎಡ ವಿಭಾಜಕ ನಿಯಮ.** ಇದರಂತೆಯೇ, ಬಲವಿಭಾಜಕ ನಿಯಮವಾದ

Theorem 5. $(a+b).\ c = (a.c) + (b.c)$

The proof is on similar lines.

We can now establish the commutativity of multiplication.

Theorem 6. *For any two natural numbers,* $a.b = b.a$

Let $P\ (n)$ denote $a.n = n.a$. By Axiom 1, $P\ (1)$ is true.

Let $P\ (k)$ be true.

Now $a.\ (k+1) = (a.k) + (a.1)$, Theorem 4

and $(k+1).\ a = (k.a) + (1.a)$, ,, 5

But $a.k = k.a$ and $a.1 = 1.a$

$$\therefore a.\ (k+1) = (k+1).\ a$$

$\therefore$ If $P\ (k)$ is true, $P(k+1)$ is also true. Theorem 6 follows.

Theorem 7. For any natural numbers,

$a.\ (b.c) = (a.b).\ c$. [Associative Law for multiplication]

The proof is left as an exercise to the students.

We now start with the identity 1, and construct the numbers

$1,\ 1+1,\ (1+1)+1, \Big[\ (1+1)+1\ \Big] +1$, and so on. We write these as 1, 2, 3, 4, . . . In this way, we have obtained the natural numbers by the help of our axioms.

2.6 Order. We now consider the relation, "greater than." This has been already introduced in Chapter 1, and the symbol for it has been mentioned.

Let R be the set $\Big\{(a, b)$; $a,\ b \in N$; there exists a natural number c such that $a = b + c\Big\}$. The relation $a\ R\ b$ is written $a > b$ or $b < a$, and is read, "a is greater than b," or "b is less than a".

ಪ್ರಮೇಯ 5. $(a+b)\cdot c = (a\cdot c) + (b\cdot c)$

ಎಂಬುದೂ ಇದೆ. ಸಾಧನೆಯು ಮೇಲಿನಂತೆಯೇ ಇರುತ್ತದೆ.

ಈಗ ಗುಣಾಕಾರದ ಪರಿವರ್ತನತೆಯನ್ನು ಸಾಧಿಸಬಹುದು.

ಪ್ರಮೇಯ 6. ಯಾವುದೇ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ, $a\cdot b = b\cdot a$

$a\cdot n = n\cdot a$ ಎಂಬುದನ್ನು $P(n)$ ಎಂದು ಕರೆಯೋಣ. ಪ್ರಮಾಣ 1 ರಿಂದ $P(1)$ ನಿಜ. $P(k)$ ನಿಜವಿರಲಿ.

ಈಗ $a\cdot(k+1) = (a.k) + (a\cdot 1)$ ಪ್ರಮೇಯ 4

ಮತ್ತು $(k+1)\cdot a = (k\cdot a) + (1.a)$ ಪ್ರಮೇಯ 5

$a\cdot k = k\cdot a$ ಮತ್ತು $a.1 = 1.a$ ಆದ್ದರಿಂದ,

$$a\cdot(k+1) = (k+1)\cdot a$$ ಆಯಿತು.

ಎಂದರೆ, $P(k)$ ನಿಜವಿದ್ದಾಗ, $P(k+1)$ ಸಹ ನಿಜ. ಪ್ರಮೇಯ 6ನ್ನು ಸಾಧಿಸಿದ್ದಾಯಿತು.

ಪ್ರಮೇಯ 7. **ಯಾವುದೇ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ,**

$a\cdot(b\cdot c) = (a\cdot b)\cdot c$ [ಗುಣಾಕಾರದ ಸಹವರ್ತನೆ]. ಸಾಧನೆಯನ್ನು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಬಿಡಲಾಗಿದೆ.

ಈಗ 1 ಎಂಬ ಏಕಮಾನದಿಂದ ಆರಂಭಿಸಿ.

1, 1+1, (1+1) +1, [(1+1) +1] +1, ಇತ್ಯಾದಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಲಭಿಸುತ್ತವೆ. ಇವನ್ನು 1, 2, 3, 4, . . . ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಈ ಪ್ರಕಾರ, ನಮ್ಮ ಸ್ವತಸ್ಸಿದ್ಧಪ್ರಮಾಣಗಳಿಂದ, 1, 2, 3, . . . ಮುಂತಾದ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪಡೆದಂತಾಗುತ್ತದೆ.

2 6 **ಕ್ರಮರಚನೆ.** ಈಗ "ಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡದು" ಎಂಬ ಒಂದು ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಮುಂದಿಡುತ್ತೇವೆ. ಸಂಬಂಧದ ವಿಚಾರವನ್ನೂ ಅದರ ಸಂಕೇತವನ್ನೂ ಅಧ್ಯಾಯ 1ರಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

R ಎಂಬುದು $\{(a, b)$; a, bಗಳು $\in N$; $a = b + c$ ಆಗುವಂತೆ ಒಂದು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ c ಇದೆ$\}$ ಎಂಬ ಗಣವಾಗಿರಲಿ. $a\,R\,b$ ಸಂಬಂಧವನ್ನು, $a > b$ ಅಥವಾ $b < a$ ಎಂದು ಬರೆದು, "b ಗಿಂತ a ದೊಡ್ಡದು," ಅಥವಾ "a ಗಿಂತ b ಚಿಕ್ಕದು" ಎಂದು ಓದುತ್ತೇವೆ.

Ex: $2=1+1 \quad \therefore 2>1$ or $1<2$.

Theorem 8. *(Trichotomy). If a, b are natural numbers, one and only one of the following is true*:

$$a=b, \quad a>b, \quad a<b.$$

This is only another form of Axiom 5.

Theorem 9. *The relation made on* N *by the symbol* $>$ *is transitive.*

In other words, if $a>b$ and $b>c$, then $a>c$.

By definition, there exist elements x, y of N such that

$$a=b+x \text{ and } b=c+y.$$

$$\therefore a=(c+y)+x$$

$$=c+(x+y), \text{ by associative law}$$

Since $x+y$ is a natural number, $a>c$.

2.7 Linear Order. *If the relation* R *on the set* S *possesses the following properties, it is called a linear order*:

(i) *For* $a, b \in$ S, *one only of* a R b *or* b R a *is true.*

(ii) a R a *is not possible.*

(iii) *if* a R b *and* b R c, *then* a R c.

The following theorem results at once

Theorem 10. *The relation* $>$ *establishes a linear order on the natural numbers.*

The geometrical meaning of this is clear. If on a straight line, we choose two points, and the direction called "right", natural numbers can be represented by equidistant points.



Fig. 2.1

The meaning of the relation $a>b$ is that the point representing a is to the right of the point representing b.

ಉದಾ : $2=1+1$ ಆದ್ದರಿಂದ, $2>1$ ಅಥವಾ $1<2$.

ಪ್ರಮೇಯ 8. (ತ್ರಿಚ್ಛೇದ್ಯತೆ). a, b ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದರೆ, ಕೆಳಗಿನ ಮೂರರಲ್ಲಿ ಒಂದು, ಒಂದು ಮಾತ್ರ ನಿಜ.

$a=b$, $a>b$, $a<b$.

ಇದು ಪ್ರಮಾಣ 5 ರ ರೂಪಾಂತರ, ಅಷ್ಟೇ.

ಪ್ರಮೇಯ 9. $>$ ಎಂಬ ಚಿಹ್ನೆಯು N ಗಣದ ಮೇಲೆ ಉಂಟು ಮಾಡುವ ಸಂಬಂಧವು ವಾಹಕ.

ಎಂದರೆ, $a>b$ ಮತ್ತು $b>c$ ಆದರೆ, $a>c$.

ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯಂತೆ, $a=b+x$, ಮತ್ತು $b=c+y$ ಆಗಿರುವಂತೆ N ಗಣಾಂಶಗಳಾದ x, y ಇರುತ್ತವೆ.

$\therefore a=(c+y)+x$

$= c+(x+y)$ ಸಹವರ್ತನೆಯಿಂದ

$x+y$ ಒಂದು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದ್ದರಿಂದ, $a>c$.

2.7 **ಸಾಲುಕ್ರಮ. S ಎಂಬ ಒಂದು ಗಣದ ಮೇಲೆ R ಸಂಬಂಧವು ಕೆಳಗಿನ ಗುಣಗಳನ್ನು ಪಡೆದಿದ್ದರೆ, ಅದು ಸಾಲುಕ್ರಮದ ಸಂಬಂಧ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.**

(i) $a, b \in S$ ಗಳಿಗೆ $a R b$ ಇಲ್ಲವೇ $b R a$, ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಮಾತ್ರ ನಿಜ. (ii) $a R a$ ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ (iii) $a R b$ ಮತ್ತು $b R c$ ಆದಾಗ, $a R c$.

ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರಮೇಯವು ಒಡನೆಯೇ ಫಲಿಸುತ್ತದೆ.

ಪ್ರಮೇಯ 10. **$>$ ಸಂಬಂಧವು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೇಲೆ ಸಾಲುಕ್ರಮವನ್ನು ಏರ್ಪಡಿಸುತ್ತದೆ.**

ಇದರ ರೇಖಾಗಣಿತೀಯ ಅರ್ಥವು ಸ್ಪಷ್ಟ. ಒಂದು ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳನ್ನೂ "ಬಲ" ಎಂಬ ದಿಕ್ಕನ್ನೂ ಆರಿಸಿಕೊಂಡರೆ, ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸಮಾನದೂರದಲ್ಲಿರುವ ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಚಿತ್ರಿಸಬಹುದು.



ಚಿತ್ರ 2.1

$a>b$ ಎಂಬುದರ ಅರ್ಥ a ನ್ನು ಚಿತ್ರಿಸುವ ಬಿಂದು b ನ್ನು ಚಿತ್ರಿಸುವ ಬಿಂದುವಿನ ಬಲಕ್ಕಿದೆ ಎಂದು.

2.8 Other Theorems.

Theorem 11. *If $a > b$, then for any $n \in N$,*

(i) $a+n > b+n$

and (ii) $a.n > b.n$

Proof: (i) $a=b+c$. Hypothesis

$\therefore \quad a+n=(b+c)+n$

$= b+(c+n)$

$= b+(n+c)$

$= (b+n)+c$

$\therefore \quad a+n > b+n$

(ii) $a.n=(b+c).\,n$

$= b.n+(c.n)$

$\therefore \quad a.n > b.n$

Theorem 12. (*Cancellation Law of Addition*).

If $a+c=b+c$, then $a=b$.

Proof: Since a, b are natural numbers, only one of the following is true, by Theorem 8.

$a=b$, or $a > b$, or $b > a$.

If $a > b$, then $a+c > b+c$ (Theorem 11)

If $b > a$, then $b+c > a+c$

Both these contradict the hypothesis. Hence $a=b$.

Similarly, we have

Theorem 13. (*Cancellation Law of multiplication*).

If $a.c=b.\,c$, then $a=b$.

Theorem 14. (i) *If $a+c > b+c$, then $a > b$.*

(ii) *If $a.c > b.c$, then $a > b$.*

[Throughout a, b, c, etc. are natural numbers.]

2.8 ಇತರ ಪ್ರಮೇಯಗಳು.

ಪ್ರಮೇಯ 11. $a > b$ ಆದಾಗ, ಯಾವುದೇ $n \in N$ ಗೆ,

(i) $a+n > b+n$

ಮತ್ತು (ii) $a \cdot n > b \cdot n$

ಸಾಧನೆ: (i) $a=b+c$ ದತ್ತ

$\therefore\ a+n=(b+c)+n$

$= b+(c+n)$

$= b+(n+c)$

$=(b+n)+c$

$\therefore\ a+n > b+n$

(ii) $a \cdot n =(b+c) \cdot n$

$= (b \cdot n)+(c \cdot n)$

$\therefore\ a \cdot n > b \cdot n$

ಪ್ರಮೇಯ 12. (ಸಂಕಲನದ ನಿರಸನಕ್ರಿಯೆ). $a+c=b+c$ ಆದರೆ, $a=b$.

ಸಾಧನೆ: a, b ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದ್ದರಿಂದ, ಪ್ರಮೇಯ 8 ರಂತೆ, $a=b$, ಇಲ್ಲವೆ $a > b$, ಇಲ್ಲವೆ $b > a$. ಒಂದು ಮಾತ್ರ ನಿಜ.

$a > b$ ಆದರೆ $a+c > b+c$ (ಪ್ರ. 11)

$b > a$ ಆದರೆ $b+c > a+c$.

ಇವೆರಡೂ ದತ್ತಕ್ಕೆ ವಿರೋಧವಾದುದರಿಂದ, $a=b$ ನಿಜ.

ಹೀಗೆಯೇ

ಪ್ರಮೇಯ 13. (ಗುಣಾಕಾರದ ನಿರಸನಕ್ರಿಯೆ). $a \cdot c=b.c$ ಆದರೆ, $a=b$.

ಪ್ರಮೇಯ 14. (i) $a+c > b+c$ ಆದರೆ $a > b$

(ii) $a \cdot c > b \cdot c$ ಆದರೆ $a > b$.

[ಉದ್ದಕ್ಕೂ a, b, c ಮುಂತಾದುವು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ; ಪದೇಪದೇ ಹೇಳುವುದಿಲ್ಲ]

This is the converse of Theorem 11. The proof is straightforward.

Theorem 15. *There is no natural number n between a and* $a+1$. In other words, $a < n < a+1$ is not possible.

Proof. Let this be possible.

$\therefore$ By the definition of $<$, $a+x=n$ and $n+y=a+1$.

$$\therefore \quad (a+x)+y=a+1$$

$$\therefore \quad a+(x+y)=a+1.$$

$$\therefore \quad x+y=1, \text{ by cancellation law (Theorem 12)}$$

Now, by Axiom 4, either $y=1$, or there exists a t such that $y=t+1$.

If $y=1$, then $x+1=1$

If $y \neq 1$, then $x+(t+1)=(x+t)+1=1$.

Since $1=1$, we cannot have $x+1=1$, or $(x+t)+1=1$ (Axiom 5).

$$\therefore \quad a < n < a+1 \text{ is not possible.}$$

2.9 Well-Ordering.

Theorem 16. *In any non-empty subset of the natural numbers, there exists a least number.*

Proof. Let us suppose that the set T has no least number. Therefore, the number 1 is not an element of T, otherwise that would have been the least number of T. Let S be the set of all natural numbers n which are less than some element t of T. In other words,

$$S=\{n;\, n<t,\ t \in T\}.$$

For all $t \in T$, $1<t$. Hence $1 \in S$. Let k be any natural number $\in S$.

$\therefore$ $k<t$, $t \in T$. We shall now show that $k+1 \in S$.

If this is not true, there exists a $t_1 \in T$ such that $t_1 \leq k+1$.

ಇದು ಪ್ರಮೇಯ 11 ರ ವಿಲೋಮ. ಸಾಧನೆ ಸುಲಭವಾಗಿಯೇ ಇದೆ.

ಪ್ರಮೇಯ 15. a ಗೂ $a+1$ ಗೂ ನಡುವೆ ಬೇರೊಂದು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ n ಇರುವುದಿಲ್ಲ. ಎಂದರೆ $a < n < a+1$ ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ.

ಸಾಧನೆ: ಇದು ಸಾಧ್ಯವಿರಲಿ.

$\therefore$ $<$ ನ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯಂತೆ, $a+x=n$, ಮತ್ತು $n+y=a+1$

$\therefore (a+x)+y=a+1$

$\therefore a+(x+y)=a+1$

$\therefore x+y=1$ [ನಿರಸನದಿಂದ ; ಪ್ರಮೇಯ 12]

ಈಗ ಪ್ರಮಾಣ 4ರಂತೆ, $y=1$ ಆಗಿರಬೇಕು, ಇಲ್ಲದಿದ್ದರೆ $y=t+1$ ಆಗಿರುವಂತೆ t ಸಂಖ್ಯೆ ಇದೆ.

$y=1$ ಆದರೆ, $x+1=1$

$y\neq 1$ ಆದರೆ, $x+(t+1)=(x+t)+1=1$

$1=1$ ಆದ್ದರಿಂದ, $x+1=1$ ಅಥವಾ $(x+t)+1=1$, ಇದು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ (ಪ್ರಮಾಣ 5).

ಆದ್ದರಿಂದ $a<n<a+1$ ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ.

2.9 ಸುಕ್ರಮತೆ.

ಪ್ರಮೇಯ 16. ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಯಾವುದೇ ಅಶೂನ್ಯ ಉಪಗಣ T ನಲ್ಲಿ, ಒಂದು ಕನಿಷ್ಠ ಸಂಖ್ಯೆ ಇರುತ್ತದೆ.

ಸಾಧನೆ: T ನಲ್ಲಿ ಕನಿಷ್ಠ ಸಂಖ್ಯೆ ಇಲ್ಲ ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. ಆದ್ದರಿಂದ 1 ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯೂ T ನಲ್ಲಿಲ್ಲ. ಇದ್ದಿದ್ದರೆ ಅದೇ T ಯ ಕನಿಷ್ಠ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗುತ್ತಿತ್ತು. T ನ ಯಾವುದೇ ಅಂಶ t ಗಿಂತ ಕಡಮೆಯಾಗಿರುವ ಎಲ್ಲಾ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ n ನ ಗಣವನ್ನು S ಎನ್ನೋಣ. ಎಂದರೆ,

$$S=\{n ;\ n<t,\ t\in T\}.$$

ಎಲ್ಲಾ $t\in T$ ಗೂ, $1<t$ ಆದ್ದರಿಂದ, S ನಲ್ಲಿ 1 ಇದೆ.

S ನಲ್ಲಿರುವ ಯಾವುದೇ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ k ಆಗಿರಲಿ.

$\therefore k<t,\ t\in T$. ಈಗ $k+1$ ಸಹ S ನಲ್ಲಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸುವೆವು. ಹೀಗಿಲ್ಲದಿದ್ದರೆ, $t_1\leq k+1$ ಆಗುವಂತೆ, T ನಲ್ಲಿ t_1 ಸಂಖ್ಯೆ ಇರುತ್ತದೆ. ಆದರೆ

But since T has no least number, there exists another number t_2 in T such that $t_2 < t_1$.

$\therefore t_2 < k+1$, $\therefore t_2 \leq k$. This contradicts the statement $k < t$ (t is any number of T). Hence $k+1 \in S$. Hence by the theorem of mathematical induction, all natural numbers $\in S$. In other words, if t is any element of T, $t \in S$. By the definition of S, we have then $t < t$. Since this is not possible, our assumption that T has no least number is wrong. Hence the theorem is proved.

We have proved this theorem by using mathematical induction. Conversely, mathematical induction can be proved by the help of the above theorem.

Let the subset S of natural numbers possess the following properties.

(i) $1 \in S$, (ii) if $k \in S$, then $k+1 \in S$.

Let T be the subset of all natural numbers which are not in S. We shall show that T is a null set If T is not empty, then by Theorem 16, it has a least number m. Also $m \neq 1$, for $1 \in S$. $\therefore$ $m \geq 2$, and $m-1 \notin T$, for m is the least number of T. $\therefore$ $m-1 \in S$. Hence by (ii), $m \in S$. Thus m occurs both in S and in T. This is not possible. Hence T must be empty. Thus all natural numbers $\in S$. But this is the theorem of mathematical induction.

Mathematical induction and well-ordering are thus identical in principle.

Lastly a set can have only one least number. If there are two least numbers a and b, we must have $a \; R \; b$ and $b \; R \; a$. This contradicts the linear order principle.

T ನಲ್ಲಿ ಕನಿಷ್ಠ ಸಂಖ್ಯೆ ಇಲ್ಲವಾದ್ದರಿಂದ, T ನಲ್ಲಿ $t_2 < t_1$ ಆಗುವಂತೆ ಇನ್ನೊಂದು ಸಂಖ್ಯೆ t_2 ಇದೆ.

$\therefore$ $t_2 < k+1$, ಆದ್ದರಿಂದ $t_2 \leq k$. ಇದು $k < t$, (t, T ಯ ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆ) ಎಂಬ ಹೇಳಿಕೆಯನ್ನು ವಿರೋಧಿಸುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ,

$k+1$, S ನಲ್ಲಿದೆ. ಗಣಿತಾನುಮಾನ ಪ್ರಮೇಯದಿಂದ, S ನಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲಾ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೂ ಇವೆ.

ಎಂದರೆ T ನ ಯಾವುದೇ ಅಂಶ t ಆದರೆ, $t \in S$. S ನ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯಂತೆ, $t < t$ ಆಯಿತು. ಇದು ಸಾಧ್ಯವಲ್ಲದಿದ್ದರಿಂದ, T ನಲ್ಲಿ ಕನಿಷ್ಠ ಸಂಖ್ಯೆ ಇಲ್ಲ ಎಂಬ ನಮ್ಮ ಒಪ್ಪಿಗೆ ತಪ್ಪು. ಆದ್ದರಿಂದ, ಪ್ರಮೇಯವು ಸಾಧಿತವಾಯಿತು.

ಗಣಿತಾನುಮಾನದಿಂದ ಮೇಲಣ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಸಾಧಿಸಿದ್ದೇವೆ. ವಿಲೋಮವಾಗಿ ಮೇಲಣ ಪ್ರಮೇಯದಿಂದ, ಗಣಿತಾನುಮಾನವನ್ನು ಸಾಧಿಸಬಹುದು.

ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಉಪಗಣ S ಎಂಬುದಕ್ಕೆ ಕೆಳಗಿನ ಗುಣಗಳಿರಲಿ.

(i) 1 ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆ S ನಲ್ಲಿದೆ.

(ii) $k \in S$ ಆದರೆ, $k+1 \in S$.

S ನಲ್ಲಿಲ್ಲದ ಎಲ್ಲಾ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣವನ್ನು T ಎಂದು ಕರೆಯೋಣ. T ಶೂನ್ಯ ಗಣವೆಂದು ತೋರಿಸುವೆವು. T ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದಿದ್ದರೆ, ಪ್ರಮೇಯ 16 ರಂತೆ, ಅದರಲ್ಲಿ ಒಂದು ಕನಿಷ್ಠ ಸಂಖ್ಯೆ m ಇರಬೇಕು. $m \neq 1$, ಏಕೆಂದರೆ $1 \in S$.

$\therefore m \geq 2$ ಮತ್ತು $m-1 \notin T$ ಏಕೆಂದರೆ T. ನಲ್ಲಿ ಕನಿಷ್ಠಸಂಖ್ಯೆ m ಆದ್ದರಿಂದ, $m-1 \in S$. ಆದ್ದರಿಂದ, (ii) ರ ಪ್ರಕಾರ $m \in S$. ಎಂದರೆ S ಮತ್ತು T ಎರಡರಲ್ಲೂ m ಇದೆ. ಇದು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ.

$\therefore$ T ಶೂನ್ಯಗಣ, ಅಥವಾ S ನಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲಾ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೂ ಇವೆ. ಗಣಿತಾನುಮಾನ ಪ್ರಮೇಯವೇ ಇದು.

ಹೀಗೆ, ಗಣಿತಾನುಮಾನವೂ ಸುಕ್ರಮತೆಯೂ ಒಂದೇ ತತ್ವವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಕಡೆಯದಾಗಿ ಒಂದು ಗಣದಲ್ಲಿ ಒಂದೇ ಒಂದು ಕನಿಷ್ಠ ಅಂಶವಿರಲು ಸಾಧ್ಯ. ಎರಡು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಕನಿಷ್ಠಾಂಶಗಳು a, b ಇದ್ದರೆ, $a R b$ ಮತ್ತು $b R a$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಸಾಲು ಕ್ರಮದ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಗೆ ಇದು ವಿರುದ್ಧವಾಗುತ್ತದೆ.

Theorem 17. *The Second Principle of Mathematical Induction.*

$P(n)$ is a statement. If $P(k)$ is true whenever $k < m$, and if $P(m)$ is also true, then the statement $P(n)$ is true for all natural numbers n.

Proof. Let S be the set of natural numbers t for which $P(t)$ is not true. If S is not an empty set, it has a least element s. This means that $P(s)$ is not true. But every p for which $p < s$, is not in S, *i.e.* $P(p)$ is true. Therefore by hypothesis, $P(s)$ is true. Thus $P(s)$ is true and also not true. Therefore S can only be the null set. Therefore $P(n)$ is true for all natural numbers.

Theorem 1 constitutes the first principle of mathematical induction. That the second principle is wider in scope will be clear from the extent of the hypothesis.

Exercises 2.1

All the numbers occurring here are natural numbers

1 If $b=c$, prove that $a.b=a.c$

2 Prove that the element 1 defined in Axiom 1 is unique [If $a.1=a.1'$, then $1=1'$.]

3 Prove that $n \neq n+1$

4 Prove that $a+b \neq a$

5 $(a+b)+(c+d)=a+[(b+c)+d]$

6 If $a=b$, $b > c$, prove that $a > c$

7 If $a=b.c$ and $c > 1$, then $a > b$

8 If $a > b$ and $c > d$, then $a.c > b.d$ and $a+c > b+d$

9 Prove that for all n, $P(n)$: $1 \leq n$.

ಪ್ರಮೇಯ 17. ಗಣಿತಾನುಮಾನದ ಎರಡನೆಯ ತತ್ವ.

$P(n)$ ಎಂಬುದೊಂದು ಹೇಳಿಕೆ. $k < m$ ಆದಾಗಲೆಲ್ಲಾ $P(k)$ ನಿಜವಿದ್ದಲ್ಲಿ, $P(m)$ ಸಹ ನಿಜವಿದ್ದರೆ, $P(n)$ ಹೇಳಿಕೆ ಎಲ್ಲಾ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ n ಗಳಿಗೂ ನಿಜ.

ಸಾಧನೆ : $P(t)$ ನಿಜವಿಲ್ಲದಿರುವ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ t ಯ ಗಣ S ಆಗಿರಲಿ. S ಅಶೂನ್ಯ ಗಣವಿದ್ದಲ್ಲಿ, ಅದರಲ್ಲಿ ಒಂದು ಕನಿಷ್ಠಾಂಶ s ಇರುತ್ತದೆ; ಎಂದರೆ $P(s)$ ನಿಜವಲ್ಲ. ಆದರೆ $p < s$ ಆಗಿರುವ, ಪ್ರತಿ p ಯೂ S ನಲ್ಲಿಲ್ಲ. ಎಂದರೆ $P(p)$ ನಿಜ. ಆದ್ದರಿಂದ, ದತ್ತದಂತೆ $P(s)$ ನಿಜ. ಹೀಗೆ $P(s)$ ನಿಜ, ನಿಜವಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ, S ಶೂನ್ಯಗಣವೇ ಆಗಿರಬೇಕು. ಎಂದರೆ $P(n)$ ಎಲ್ಲಾ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೂ ನಿಜ.

ಗಣಿತಾನುಮಾನದ ಮೊದಲನೆಯ ತತ್ವವು ಪ್ರಮೇಯ 1 ಆಗಿದೆ. ಎರಡನೆಯ ತತ್ವದ ವ್ಯಾಪ್ತಿ ಮೊದಲನೆಯದಕ್ಕಿಂತ ಅಧಿಕ ಎಂಬುದು ದತ್ತದ ವಿಸ್ತಾರದಿಂದ ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗುತ್ತದೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ 2.1

ಇಲ್ಲಿ ಬರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೆಲ್ಲಾ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು.

1 $b=c$ ಆದರೆ $a \cdot b = a \cdot c$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

2 ಪ್ರಮಾಣ 1 ರಲ್ಲಿ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಗೊಂಡ 1 ಎಂಬ ಅಂಶ ಏಕೈಕ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

[$a \cdot 1 = a . 1'$, ಆದರೆ, $1 = 1'$.]

3 $n \neq n + 1$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

4 $a + b \neq a$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

5 $(a + b) + (c + d) = a + [(b + c) + d]$

6 $a = b, \ b > c$ ಆದರೆ $a > c$.

7 $a = b \cdot c$ ಮತ್ತು $c > 1$ ಆದರೆ $a > b$.

8 $a > b$ ಮತ್ತು $c > d$ ಆದರೆ

$a \cdot c > b . d$ ಮತ್ತು $a + c > b + d$.

9 ಎಲ್ಲಾ n ಗೂ $P(n)$: $1 \leq n$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ADDENDUM

2.2a. In order to define the natural numbers, we started with a set of axioms, and derived the numbers and their properties. We had mentioned that the axioms could be chosen in other ways too, and the mathematics developed out of these. One such method will be briefly given here. The following chain of arguments is alternative to the axioms given in 2.2 and the theorems that follow from them. The student may at his option, follow the above development or may follow the development given below. This method was propounded in 1899 by the Italian mathematican G. Peano (1858—1932).

Peano's Axioms. N is a non-empty set, whose elements satisfy the following properties.

1 Every element a has a *successor*, which will be denoted by the symbol a^+.

2 All the successors form *a proper* subset of N. This means that there is at least one element in N which has no successor.

3 If $a^+=b^+$, then $a=b$.

4 If a subset of N is such that it contains an element which is not the successor of any element of N, and also the successors of all the elements cf the subset, then that subset is the set N itself.

Theorem (i) *N has only one element which is not a successor of any element.*

Proof. Let there be two such elements, e and e'. By Axiom 4, the subset which contains e' and all successors is the set N itself. Hence e is also in this subset. But the subset was constructed, omitting e.

The element which is not a successor of any element will be called *one* and written 1. Then 1^+ will be called two (2), 2^+ will be called three (3), and so on. Thus we have constructed the natural numbers.

ಟಿಪ್ಪಣಿ

2.2 a ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸುವುದಕ್ಕಾಗಿ ಕೆಲವು ಸ್ವತಸ್ಸಿದ್ಧ ಪ್ರಮಾಣಗಳನ್ನು ಇಟ್ಟುಕೊಂಡು, ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನೂ ಅವುಗಳ ಗುಣಗಳನ್ನೂ ಪಡೆದಿದ್ದೇವೆ ಸ್ವತಸ್ಸಿದ್ಧ ಪ್ರಮಾಣಗಳನ್ನು ಇನ್ನೂ ಹಲವು ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ತೆಗೆದು ಕೊಂಡು ಗಣಿತವನ್ನು ಬೆಳೆಸಬಹುದೆಂದು ತಿಳಿಸಿದ್ದೆವು. ಇಂಥ ಬೇರೊಂದು ವಿಧಾನ ವನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ಸಂಕ್ಷೇಪವಾಗಿ ಕೊಡುವೆವು. 2.2 ರಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸ್ವತಸ್ಸಿದ್ಧ ಪ್ರಮಾಣ ಗಳಿಗೂ ಅವುಗಳಿಂದ ಉದ್ಭವಿಸುವ ಪ್ರಮೇಯಗಳಿಗೂ ಕೆಳಗಿನ ವಾದಸರಣಿ ಪರ್ಯಾಯವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯು ತನ್ನ ಇಚ್ಛೆಯಂತೆ ಮೇಲೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಬೆಳವಣಿಗೆಯನ್ನು ಅನುಸರಿಸಬಹುದು, ಇಲ್ಲವೇ ಈಗ ಕೊಡಲಿರುವ ಬೆಳವಣಿಗೆಯನ್ನು ಅನುಸರಿಸಬಹುದು. ಈ ವಿಧಾನವನ್ನು ಜಿ. ಪಿಯಾನೊ, (1858–1932) ಎಂಬ ಇಟಲಿ ದೇಶದ ವಿದ್ವಾಂಸನು 1899 ರಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಪಾದಿಸಿದನು.

ಪಿಯಾನೋವಿನ ಸ್ವತಸ್ಸಿದ್ಧ ಪ್ರಮಾಣಗಳು. N ಒಂದು ಅಶೂನ್ಯ ಗಣ. ಅದರ ಗಣಾಂಶಗಳು ಕೆಳಗಿನ ಗುಣಗಳಿಗೆ ವಿಧೇಯವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

1 ಪ್ರತಿಗಣಾಂಶ a ಗೂ, ಒಂದು ಉತ್ತರಾಂಶ ಇರುತ್ತದೆ. ಉತ್ತರಾಂಶ ವನ್ನು a^+ ಎಂಬ ಚಿಹ್ನೆಯಿಂದ ತೋರುತ್ತೇವೆ.

2 ಉತ್ತರಾಂಶಗಳೆಲ್ಲವೂ N ನ ಒಂದು ಶುದ್ಧ ಉಪಗಣವನ್ನು ಉಂಟು ಮಾಡುತ್ತವೆ. ಅರ್ಥಾತ್, ಉತ್ತರಾಂಶವಲ್ಲದಿರುವ ಒಂದು ಅಂಶವಾದರೂ N ನಲ್ಲಿದೆ.

3 $a^+ = b^+$ ಆದರೆ, $a = b$.

4 N ನ ಉಪಗಣವೊಂದರಲ್ಲಿ, N ನ ಯಾವ ಅಂಶಕ್ಕೂ ಉತ್ತರಾಂಶವಾಗದ ಒಂದು ಅಂಶವೂ, ಉಪಗಣದ ಅಂಶಗಳ ಉತ್ತರಾಂಶಗಳೂ ಅಡಕವಾಗಿದ್ದಲ್ಲಿ, ಆ ಉಪಗಣವು ಪೂರ್ಣ N ಗಣವೇ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಪ್ರಮೇಯ (i). N ನಲ್ಲಿ ಯಾವುದಕ್ಕೂ ಉತ್ತರಾಂಶವಾಗದ ಒಂದೇ ಒಂದು ಗಣಾಂಶವಿರುತ್ತದೆ.

ಸಾಧನೆ : ಇಂಥ ಎರಡು ಗಣಾಂಶಗಳು e, e' ಇರಲಿ. e' ನ್ನೂ ಎಲ್ಲಾ ಉತ್ತರಾಂಶಗಳನ್ನೂ ಒಳಗೊಂಡ ಉಪಗಣವು N ಆಗಿರಬೇಕು. (ಪ್ರಮಾಣ 4 ರಂತೆ) ಎಂದರೆ e ಸಹ ಉಪಗಣದಲ್ಲಿದೆ. ಆದರೆ e ಬಿಟ್ಟು ಉಪಗಣವನ್ನು ರಚಿಸಿದ್ದೆವು.

ಯಾವ ಅಂಶಕ್ಕೂ ಉತ್ತರಾಂಶವಲ್ಲದ ಗಣಾಂಶವನ್ನು 1 (ಒಂದು) ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. 1^+ ನ್ನು 2 ಎಂದೂ, 2^+ ನ್ನು 3 ಎಂದೂ, ಇತ್ಯಾದಿ ಯಾಗಿ ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಹೀಗೆ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿದೆವು.

Now we shall prove the Principle of Mathematical Induction (Theorem 1) given in 2.2, p. 24. The statement of the theorem need not be repeated.

Let S be the set of "natural numbers" (as defined above) for which $P(s)$ is true. By hypothesis $1 \in S$ and if $k \in S$, then k^+ also $\in S$. Therefore by the 4th Axiom of Peano, $S = N$. i. e. $P(n)$ is true for every $n \in N$.

2.3a. *Definition of Addition. If m, n are any two natural numbers, there is one and only one natural number $m+n$ having the properties*

$$(1) \quad m+1 = m^+$$

$$(2) \quad m+n^+ = (m+n)^+.$$

Consequently, there is a number $m+n$ which is the sum of m and n.

Proof: Let m be any natural number. Let $P(n)$ be the statement that for a given n, $m+n$ exists. If m^+ is called $m+1$, it means that $P(1)$ exists. By the property (2) of the definition, $m+k^+$ exists if $m+k$ exists. Therefore if $P(k)$ is true, $P(k^+)$ or $P(k+1)$ is also true. By the Theorem of mathematical induction, therefore, $P(n)$ is true for all natural numbers n. This means that the number $m+n$ exists. Hence we have defined the "sum" of any two natural numbers m and n.

Definition of Multiplication. There is one and only one natural number mn having the properties that for any two natural numbers m and n (1) $m.1 = m$ (2) $m.n^+ = m.n+m$.

We can prove as above, from this definition, that the number mn exists.

2.4a. From Peano's Axioms and the above definition, the Axioms 1, 2, 4, 6 of the previous method are thus obtained.

ಈಗ 2.2 ರಲ್ಲಿ ಇರುವ ಗಣಿತಾನುಮಾನದ ತತ್ವ (ಪ್ರಮೇಯ 1) ವನ್ನು ಸಾಧಿಸುವೆವು. ಪ್ರಮೇಯಂದ ಹೇಳಿಕೆಯನ್ನು (ಪು. 24) ಪುನಃ ಇಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬೇಕಾಗಿಲ್ಲ.

$P(s)$ ನಿಜವಿರುವ "ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ" (ಮೇಲೆ ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಿದಂತೆ) ಗಳ ಗಣವನ್ನು S ಎಂದು ಕರೆಯೋಣ. ದತ್ತದಿಂದ, $1 \in S$, ಮತ್ತು $k \in S$ ಆದರೆ, k^+ ಸಹ $\in S$. ಪಿಯಾನೋವಿನ 4 ನೆಯ ಪ್ರಮಾಣದಂತೆ, $S = N$. ಎಂದರೆ $P(n)$, ಪ್ರತಿ $n \in N$ ಗೂ ನಿಜ.

2·3 *a*. **ಸಂಕಲನದ ವ್ಯಾಖ್ಯೆ.** m, n **ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದರೆ,**

(1) $m+1=m^+$

(2) $m+n^+=(m+n)^+$

ಎಂಬ ಗುಣಗಳಿರುವ ಒಂದೇ ಒಂದು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ $m+n$ **ಇರುತ್ತದೆ.** ಇದರ ಪರಿಣಾಮವಾಗಿ, m, n ಗಳ ಮೊತ್ತ $m+n$ ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆ ಇದೆ.

ಸಾಧನೆ: m ಯಾವುದೇ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೆ, ದತ್ತ n ಗೆ $m+n$ ಇದೆ ಎಂಬ ಹೇಳಿಕೆಯನ್ನು $P(n)$ ಎಂದು ಕರೆಯೋಣ. m^+ ಎಂಬುದನ್ನು $m+1$ ಎಂದು ಕರೆದರೆ, $P(1)$ ಇದೆ ಎಂದಾಯಿತು. ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯ (2) ನೇ ಗುಣದಿಂದ, $m+k$ ಇದ್ದರೆ, $m+k^+$ ಸಹ ಇದೆ. ಎಂದರೆ $P(k)$ ನಿಜವಿದ್ದರೆ, $P(k^+)$ ಅಥವಾ $P(k+1)$ ಸಹ ನಿಜ. ಗಣಿತಾನುಮಾನ ಪ್ರಮೇಯದಿಂದ, $P(n)$ ಎಲ್ಲಾ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ n ಗೂ ನಿಜ. ಎಂದರೆ $m+n$ ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆ ಇದೆ. ಹೀಗೆ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ m, n ಗಳ "ಮೊತ್ತ" ವನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಲಾಯಿತು

ಗುಣಾಕಾರದ ವ್ಯಾಖ್ಯೆ. ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ m, n **ಗಳಿಗೆ,**

(1) $m \cdot 1=m$ (2) $m \cdot n^+=m \cdot n+m$

ಎಂಬ ಗುಣಗಳಿರುವ ಒಂದೇ ಒಂದು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ $m\,n$ **ಇದೆ.**

ಈ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯಿಂದ, ಮೇಲೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವಂತೆ, $m\,n$ ಸಂಖ್ಯೆ ಇದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಬಹುದು.

2·4*a* ಪಿಯಾನೊ ಪ್ರಮಾಣಗಳಿಂದಲೂ ಮೇಲಿನ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯಿಂದಲೂ, ಒಂದಿನ ವಿಧಾನದ ಸ್ವತಸ್ಸಿದ್ಧ ಪ್ರಮಾಣಗಳು 1, 2, 4, 6 ದೊರೆತಂತಾಗುತ್ತವೆ.

Axiom 3 (§ 2.2) can be written $a+b^{+} = (a+b)^{+}$. This is property (2) in the definition of addition that we have now employed.

Since the Axioms 1, 2, 3, 4, 6 of the previous method hold, Theorems 2–7 in § 2.3–§ 2.7 are established. The proofs need not be written again here.

Axiom 5 establishes order. If for the natural numbers a, b we have $a+c=b$, we define this by saying $a < b$ or $b > a$. Accordingly $1 < 2$, for $1^{+}=1+1=2$. Similarly $2 < 3$ and so on. Hence an order is set up for all natural numbers, $1 < 2 < 3 < 4 < \ldots$ This should contain a and b, any elements of N.

$\therefore$ Either $1 < 2 < \ldots < a < \ldots < b < \ldots$

or $1 < 2 < \ldots < b < \ldots < a < \ldots$

We have assumed that a and b are different elements.

ಪ್ರಮಾಣ 3 (§2.2)ನ್ನು $a+b^{+}=(a+b)^{+}$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. ಈಗ ನಾವು ಉಪಯೋಗಿಸಿರುವ ಸಂಕಲನ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯ (2)ನೇ ಗುಣವಿದು.

ಹಿಂದಿನ ವಿಧಾನದ ಪ್ರಮಾಣಗಳು 1, 2, 3, 4, 6 ನಿಜವಿರುವುದರಿಂದ, 2.3—2,7 ರಲ್ಲಿರುವ ಪ್ರಮೇಯಗಳಾದ 2–7 ನ್ನು ಸಾಧಿಸಿದಂತಾಗುತ್ತದೆ. ಸಾಧನೆಗಳನ್ನು ಮತ್ತೆ ಬರೆಯಬೇಕಾಗಿಲ್ಲ.

ಪ್ರಮಾಣ 5 ಕ್ರಮವನ್ನು ರಚಿಸುವುದಾಗಿದೆ. a, b ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ $a+c=b$ ಆದಾಗ, $a<b$, ಅಥವಾ $b>a$ ಎಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸುತ್ತೇವೆ. ಇದರಂತೆ, $1<2$, ಏಕೆಂದರೆ $1^{+}=1+1=2$, ಹೀಗೆಯೇ $2<3$, ಇತ್ಯಾದಿ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆಲ್ಲಾ ಕ್ರಮವೇರ್ಪಡುತ್ತದೆ.

$1<2<3<4<\cdots$

N ನ ಅಂಶಗಳಾದ a, b ಇಲ್ಲಿ ಇರಬೇಕಾದ್ದರಿಂದ

$1<2\cdots<a<\cdots<b<\cdots$ ಅಥವಾ

$1<2<\cdots b<\cdots a<\cdots$

ಆಗಲೇಬೇಕು. a, b ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಅಂಶಗಳೆಂದು ಭಾವಿಸುತ್ತೇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಪ್ರಮಾಣ 5 ದೊರಕಿದಂತಾಗುತ್ತದೆ.

ಪಿಯಾನೋ ಪ್ರಮಾಣಗಳನ್ನು ಅನುಸರಿಸಿ ಗಣಿತವನ್ನು ಬೆಳೆಸುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ನಾವು ಹಿಂದೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ವಿಧಾನಕ್ಕೆ ಸರಿದೂಗಿಸಲಾಯಿತು.

PART 2. INTEGERS

2.10. In the first part of this chapter, we started with a single number which was called one, and we imposed a set of axioms on the elements of a set N, which we used to prove logically that the elements of N are the natural numbers. We have employed in this development only two operations, addition (+) and multiplication (●). We have not yet brought in subtraction and division, we have not created zero and negative numbers. The need for these, i. e. the need for having other numbers besides the natural numbers is clear. If k is a given number in the set N of natural numbers, consider the function

$$F: \quad x \rightarrow x + k.$$

This maps the set N on itself. If it is given that $x+k=t$, what is the value of x ? In the older language, we are required to solve the equation $x+k=t$. This may not be possible by using natural numbers alone. Ex. If $k=5$, $t=3$, there is no natural number x satisfying the equation $x+5=3$. Hence we take up in this part the construction of a class of numbers called integers.

2.11. In the previous chapter, we have explained the concept of equivalence relation. If R is a subset of $S \times S$, and if $(a, b) \in R$, then R is an equivalence relation on the set S, if it satisfies the three properties (i) $a \; R \; a$ (ii) $b \; R \; a$ is true when $a \; R \; b$ is true (iii) If $a \; R \; b$ and $b \; R \; c$ are true, then $a \; R \; c$ is true.

We shall now introduce a new concept called *partition*.

Definition. *Let* $S_1, S_2, \ldots, S_i, \ldots$ *be subsets of* S.

Then, if (1) $S = \bigcup_i S_i$ (2) $S_i \cap S_j = \phi$ *when* $i \neq j$.

ಭಾಗ ೨. ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು

2.10 ಈ ಅಧ್ಯಾಯದ ಮೊದಲನೆಯ ಭಾಗದಲ್ಲಿ, ಒಂದು ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಮಾತ್ರ ಒಪ್ಪಿಕೊಂಡು, ಒಂದು ಗಣ N ನ ಅಂಶಗಳ ಮೇಲೆ ಕೆಲವು ಸ್ವತಸ್ಸಿದ್ಧ ಪ್ರಮಾಣಗಳನ್ನು ಹೊರಿಸಿ, N ನ ಗಣಾಂಶಗಳೇ 1, 2, 3, ಮುಂತಾದ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೆಂಬುದನ್ನು ತರ್ಕಯುಂತವಾಗಿ ಸಾಧಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಈ ಬೆಳವಣಿಗೆಯಲ್ಲಿ ಸಂಕಲನ +) ಮತ್ತು ಗುಣಾಕಾರ (●) ಎಂಬ ಎರಡು ಪರಿಕರ್ಮಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಬಳಸಿದ್ದೇವೆ. ಇನ್ನೂ ವ್ಯವಕಲನ. ಭಾಗಹಾರಗಳನ್ನು ತಂದಿಲ್ಲ. ಸೊನ್ನೆಯನ್ನೂ ಋಣಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನೂ ಸೃಷ್ಟಿಸಿಲ್ಲ. ಇವುಗಳ ಆವಶ್ಯಕತೆ, ಎಂದರೆ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಜೊತೆಗೆ ಇತರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನೂ ಉಂಟುಮಾಡಿಕೊಳ್ಳುವ ಆವಶ್ಯಕತೆ ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿದೆ. ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಗಣ N ನಲ್ಲಿ, k ಒಂದು ದತ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೆ,

$$F: \quad x \to x+k$$

ಎಂಬ ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ. ಇದು N ಗಣವನ್ನು ಅದರ ಮೇಲೆಯೇ ಚಿತ್ರಿಸುತ್ತದೆ. $x+k=t$ ಎಂಬುದು ದತ್ತವಾದರೆ, x ನ ಬೆಲೆ ಏನು ? ಹಳೆಯ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ $x+k=t$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಸಾಧಿಸಿ. ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಂದಲೇ ಇದು ಸಾಧ್ಯವಾಗದಿರಬಹುದು. ಉದಾ : $k=5$, $t=3$ ಆದರೆ $x+5=3$ ಸರಿಪಡಿಸುವ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ x ಯಾವುದೂ ಇಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳೆಂಬ ಸಂಖ್ಯಾವರ್ಗವನ್ನು ಸೃಷ್ಟಿಮಾಡಲು ಈ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ತೊಡಗುತ್ತೇವೆ.

2.11. ಹಿಂದಿನ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ಸಮಾನತೆಯ ಸಂಬಂಧ ಎಂಬ ಭಾವನೆಯನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿರುತ್ತೇವೆ. $S \times S$ ನ ಒಂದು ಉಪಗಣವನ್ನು R ಎಂದು ಕರೆದರೆ. $(a, b) \in R$ ಆದಾಗ, S ಗಣದಮೇಲೆ R ಸಮಾನತಾ ಸಂಬಂಧವಾಗಿರಲು, (i) aRa (ii) aRb ಆದಾಗ, bRa ನಿಜ (iii) aRb, bRc ಆದರೆ aRc ನಿಜ ಎಂಬ ಮೂರು ಗುಣಗಳಿರಬೇಕು.

ಈಗ **ವಿಂಗಡಣೆ** ಎಂಬ ಹೊಸದೊಂದು ಭಾವನೆಯನ್ನು ತರುತ್ತೇವೆ.

ವ್ಯಾಖ್ಯೆ. $S_1, S_2, \cdots S_i \cdots$ ಎಂಬುವು S ಗಣದ ಉಪಗಣಗಳಾಗಿರಲಿ.

(1) $S = \bigcup_i S_i$

(2) $i \neq j$ ಆದರೆ, $S_i \cap S_j = \phi$

then S_1, S_2, *etc. form a partition of* S.

The concept is readily understood by the help of common examples. The students of a college are partitioned into different classes. The people in a group can be partitioned as men and women. The straight lines in a plane can be partitioned into parallel lines in different directions. Every subset in the last example has an infinite number of elements.

There exists a fundamental connection between equivalence relations and partitions, which we describe below :

Let E be an equivalence relation on the set S. [To follow the argument easily, consider a specific example taking S as the set of all lines, and parallelism as the equivalence relation E.]

If a is any element of S, define the subset

$S_a = \{b;\ b \in S \text{ and } (a, b) \in E\}$. S_a is called the equivalence class of a [In the given example, a is a straight line. S_a is the collection of all lines parallel to it.]

If E' denotes the set of such subsets S_a, then E' is a partition of S. [This is clear in the example]. To show this, we must show that E' possesses both the properties stated in the definition.

Let S_a and S_b be two different elements of E'. Suppose the element c is common to both S_a and S_b . By the notation for relationship, we have $a\,E\,c$, $b\,E\,c$. By the definition of equivalence, $c\,E\,b$.

Since $a\,E\,c$, $c\,E\,b$, we have $a\,E\,b$.

Similarly $b\,E\,c$, $c\,E\,a$ $\therefore$ $b\,E\,a$.

ಎಂಬ ಗುಣಗಳಿದ್ದರೆ, $S_1, S_2,$ **ಮುಂತಾದುವು** S **ನ ಒಂದು ವಿಂಗಡಣೆ.**

ಸಾಮಾನ್ಯ ಉದಾಹರಣೆಗಳಿಂದ ಭಾವನೆಯು ಸುಲಭವಾಗಿಯೇ ತಿಳಿಯುತ್ತದೆ. ಒಂದು ಕಾಲೇಜಿನ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳನ್ನು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ತರಗತಿಗಳಾಗಿ ವಿಂಗಡಣೆ ಮಾಡಿರುತ್ತಾರೆ. ಒಂದು ಸಮುದಾಯದಲ್ಲಿರುವ ಜನರನ್ನು ಸ್ತ್ರೀಯರು, ಪುರುಷರು ಎಂದು ವಿಂಗಡಿಸಬಹುದು. ಒಂದು ತಳದಲ್ಲಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಗಳನ್ನೆಲ್ಲಾ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಸಮಾನಾಂತರ ಸರಳರೇಖೆಗಳನ್ನಾಗಿ ವಿಂಗಡಿಸಬಹುದು. ಕಡೆಯ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿ ಉಪಗಣದಲ್ಲಿಯೂ ಅನಂತ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಅಂಶಗಳಿರುತ್ತವೆ.

ಸಮಾನತಾ ಸಂಬಂಧಗಳಿಗೂ ವಿಂಗಡಣೆಗಳಿಗೂ ಬಹುಮುಖ್ಯವಾದ ಸಂಬಂಧವಿದೆ. ಇದನ್ನೀಗ ವಿವರಿಸುವೆವು.

S ಗಣದ ಮೇಲೆ E ಒಂದು ಸಮಾನತಾ ಸಂಬಂಧವಾಗಿರಲಿ. [ವಿಷಯವನ್ನು ಸುಲಭವಾಗಿ ಗ್ರಹಿಸುವುದಕ್ಕಾಗಿ, S ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಗಣ ಎಂದೂ ಸಮಾನಾಂತರತೆಯನ್ನು E ಸಂಬಂಧವೆಂದೂ ಉದಹರಿಸಿಕೊಂಡು, ಕೆಳಗಿನ ತರ್ಕವನ್ನು ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಿ].

S ನ ಯಾವುದೇ ಗಣಾಂಶ a ನ್ನು ಕುರಿತು

$S_a = \left\{ b : b \in S \text{ ಮತ್ತು } (a, b) \in E \right\}$ ಎಂಬ ಉಪಗಣವನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯೆಸಿ. S_a ನ್ನು a ಯ ಸಮಾನತಾವರ್ಗ ಎಂದುಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. [ಕೊಟ್ಟ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ a ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆ. ಅದಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರುವ ರೇಖೆಗಳ ಸಮುದಾಯ S_a].

ಇಂಥ S_a ಉಪಗಣಗಳ ಗಣವನ್ನು E' ಎಂದು ಕರೆದರೆ, E', S ನ ಒಂದು ವಿಂಗಡಣೆ. [ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ಇದು ಸ್ಪಷ್ಟ] ಇದನ್ನು ತೋರಿಸಲು, ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿರುವ ಎರಡೂ ಗುಣಗಳನ್ನು E' ಪಡೆದಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಬೇಕು.

E' ನ ಎರಡು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಅಂಶಗಳು S_a, S_b ಆಗಿರಲಿ. c ಅಂಶವು ಇವೆರಡರಲ್ಲೂ ಇದೆ ಎಂದು ತಿಳಿಯೋಣ. ಎಂದರೆ ಸಂಬಂಧದ ಸಂಕೇತದಂತೆ, $a E c$, $b E c$. ಸಮಾನತೆಯ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯಂತೆ, $c E b$.

$a E c$, $c E b$ ಆದ್ದರಿಂದ $a E b$

ಹೀಗೆಯೇ $b E c$, $c E a$

$\therefore b E a$.

$a\ E\ b$ means that every element b is in the set S_a. $\therefore S_a \supset S_b$

$b\ E\ a$ means that every element a is in the set S_b. $\therefore S_b \supset S_a$.

Hence $S_a = S_b$. But we supposed that S_a and S_b are different.

Therefore, the element c cannot exist. In other words,

$$S_a \cap S_b = \phi.$$

Next let x be any element of S (a straight line in the given example). All subsets of the form S_x are in E'.

$\therefore x \in E'$. $\quad \therefore E' = \bigcup_x S_x = S$. Thus we have

Theorem 18. *If E is an equivalence relation on the set S, the set E' of the equivalence classes S_a is a partition of S.*

The converse is also true. We have

Theorem 19. *If C is a partition of the set S, then*

$$E = \{(a, b);\ a, b \text{ are both in the same element of } C\}$$

is an equivalence relation.

Proof: (i) $(a, a) \in E$

(ii) If $(a, b) \in E$, then (b, a) also $\in E$.

(iii) Let a, b be both in an element C_a of C, and (b, c) be both in C_c

$\therefore b$ is in both C_a and C_c. But, by the definition of partition, $C_a \cap C_c = \phi$ $\therefore C_a = C_c$

$\therefore a, c$ are both in the same element of C.

[The proof can be readily understood by the example of parallel lines, given above].

a E b ಎಂದರೆ, ಪ್ರತಿ b ಅಂಶವೂ S_a ಗಣದಲ್ಲಿದೆ.

$\therefore S_a \supset S_b$. b E a ಎಂದರೆ, ಪ್ರತಿ a ಅಂಶವೂ S_b ಗಣದಲ್ಲಿವೆ.

$\therefore S_b \supset S_a$. ಎಂದರೆ, $S_a = S_b$. ಆದರೆ S_a, S_b ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, c ಅಂಶವಿರಲಾರದು, ಅಥವಾ $S_a \cap S_b = \phi$.

ಮತ್ತು S ನ ಯಾವುದೇ ಅಂಶ [ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆ] x ಆಗಿರಲಿ. S_x ನಂತಹ ಉಪಗಣಗಳೆಲ್ಲಾ E′ ನಲ್ಲಿವೆ. ಎಂದರೆ x ಅಂಶವು E′ ನಲ್ಲಿದೆ.

$$\therefore E' = \bigcup_x S = S.$$

ಈ ರೀತಿ,

ಪ್ರಮೇಯ 18. **S ಗಣದಮೇಲೆ E ಒಂದು ಸಮಾನತಾ ಸಂಬಂಧವಾದರೆ, ಸಮಾನತಾವರ್ಗ S_a ಗಳ ಗಣ E′ ಎಂಬುದು S ನ ಒಂದು ವಿಂಗಡಣೆ.**

ಇದರ ವಿಲೋಮವೂ ನಿಜ.

ಪ್ರಮೇಯ 19. **C ಎಂಬುದು S ಗಣದ ಒಂದು ವಿಂಗಡಣೆಯಾದರೆ,**

$$E = \left\{ (a, b) : a, b \text{ ಎರಡೂ } c \text{ ಯ ಒಂದೇ ಗಣಾಂಶದಲ್ಲಿವೆ} \right\}$$

ಎಂಬುದು ಒಂದು ಸಮಾನತಾ ಸಂಬಂಧ.

ಸಾಧನೆ : (i) (a, a) E ನಲ್ಲಿದೆ.

(ii) (a, b) E ನಲ್ಲಿದ್ದರೆ, (b, a) ಸಹ E ನಲ್ಲಿದೆ.

(iii) (a, b) ಎರಡೂ C ಯ ಒಂದು ಅಂಶ C_a ನಲ್ಲಿರಲಿ.

(b, c) ಎರಡೂ C_c ನಲ್ಲಿರಲಿ.

$\therefore b$ ಎಂಬುದು C_a, C_c ಎರಡರಲ್ಲೂ ಇದೆ. ಆದರೆ $C_a \cap C_c = \phi$

(ವಿಂಗಡಣೆಯ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯಿಂದ) $\therefore C_a = C_c$

$\therefore a, c$ ಎರಡೂ C ಯ ಒಂದೇ ಅಂಶದಲ್ಲಿವೆ.

[ಮೇಲಿನ ಸಮಾನಾಂತರರೇಖೆಗಳ ಉದಾಹರಣೆಯಿಂದ, ಸಾಧನೆಯ ಅರ್ಥವನ್ನು ಗ್ರಹಿಸಬಹುದು.]

2.12. We shall now return to the set N of natural numbers.

Let a, b, c, d etc. be natural numbers.

Definition. If $a+d=b+c$, we call this as a relation upon the set $N\times N$, and we shall write it as $(a, b)\sim(c, d)$.

Example. $(3, 1)\sim(4, 2)$, for $3+2=1+4$.

Similarly $(4, 3)\sim(5, 4)$.

Theorem 20. *The relation $\sim$ is an equivalence relation on $N\times N$.*

Proof: (i) Since $a+b=b+a$, we have $(a, b)\sim(a, b)$

(ii) If $(a, b)\sim(c, d)$, then $a+d=b+c$.

$\therefore\ b+c=a+d$

$\therefore\ c+b=d+a$, or $(c, d)\sim(a, b)$

(iii) Let $(a, b)\sim(c, d)$ and $(c, d)\sim(e, f)$.

$\therefore\ a+d=b+c$ and $c+f=d+e$.

$\therefore\ (a+d)+(c+f)=(b+c)+(d+e)$

Using the associative and commutative laws, this can be written $(a+f)+(c+d)=(b+e)+(c+d)$

$\therefore$ By the cancellation law, $a+f=b+e$

i.e. $(a, b)\sim(e, f)$.

2.12(a) By Theorem 18, the relation $\sim$ establishes a partition on the set $N\times N$.

The elements of this partition will be called integers.

Let the set

$$\{(x, y) : (x, y)\in N\times N\ ;\ (x, y)\sim(a, b)\}$$

be denoted by $[a, b]$. Let J denote the set of all such $[a, b]$.

By Theorem 20, the elements of J give a partition.

Also $[a, b]=[c, d]$ if and only if $(a, b)\sim(c, d)$.

The elements of J are the integers. $[a, b]$ will be considered as $a-b$.

2.12. ಈಗ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯಾಗಣ N ಗೆ ಹಿಂತಿರುಗುವೆವು. a, b, c, d ಮುಂತಾದುವು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರಲಿ.

ವ್ಯಾಖ್ಯೆ. $a+d=b+c$ ಆದರೆ, $(a, b) \sim (c, d)$ **ಎಂದು ಬರೆದು ಇದನ್ನು** $N \times N$ **ಗಣದ ಮೇಲಣ ಒಂದು ಸಂಬಂಧವೆನ್ನುವೆವು.**

ಉದಾಹರಣೆ : $(3, 1) \sim (4, 2)$, ಏಕೆಂದರೆ $3+2=1+4$

ಹೀಗೆಯೇ $(4, 3) \sim (5, 4)$.

ಪ್ರಮೇಯ 20. $\sim$ **ಸಂಬಂಧವು** $N \times N$ **ಮೇಲಣ ಒಂದು ಸಮಾನತಾ ಸಂಬಂಧ.**

ಸಾಧನೆ: (i) $a+b=b+a$ ಆದ್ದರಿಂದ $(a, b) \sim (a, b)$

(ii) $(a, b) \sim (c, d)$ ಇದ್ದರೆ, $a+d=b+c$

$\therefore b+c=a+d$

$\therefore c+b=d+a$, ಎಂದರೆ $(c, d) \sim (a+b)$

(iii) $(a, b) \sim (c, d)$ ಮತ್ತು $(c, d) \sim (e, f)$ ಆಗಿರಲಿ

$\therefore a+d=b+c$ ಮತ್ತು $c+f=d+e$

$\therefore (a+d)+(c+f)=(b+c)+(d+e)$

ಸಹವರ್ತನೆ ಪರಿವರ್ತನೆ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ, ಇದನ್ನು

$$(a+f)+(c+d)=(b+e)+(c+d)$$

ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

$\therefore$ ನಿರಸನಕ್ರಿಯೆಯಿಂದ, $(a+f)=(b+e)$

ಎಂದರೆ $(a, b) \sim (e, f)$.

2.12a. ಪ್ರಮೇಯ 18ರಿಂದ, $\sim$ ಸಂಬಂಧವು $N \times N$ ಗಣದ ಒಂದು ವಿಂಗಡಣೆಯನ್ನುಂಟುಮಾಡುತ್ತದೆ. **ಈ ವಿಂಗಡಣೆಯ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.**

$$\left\{ (x, y) ; (x, y) \in N \times N ; (x, y) \sim (a, b) \right\}$$

ಎಂಬ ಗಣವನ್ನು $[a, b]$ ಎಂದು ಬರೆಯೋಣ. ಇಂಥ ಎಲ್ಲಾ $[a, b]$ ಗಳ ಗಣವನ್ನು J ಎಂದು ಸೂಚಿಸೋಣ. ಪ್ರಮೇಯಂ 20 ರಂತೆ, J ಯ ಗಣಾಂಶಗಳು ಒಂದು ವಿಂಗಡಣೆಯುನ್ನು ಕೊಡುತ್ತದೆ. ಮತ್ತು

$(a, b) \sim (c, d)$ ಆದರೆ, ಆದರೆ ಮಾತ್ರ $[a, b]=[c, d]$.

J ಯ ಗಣಾಂಶಗಳೇ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು. $[a, b]$ನ್ನು $a-b$ ಎಂದು **ಭಾವಿಸುವೆವು.**

Example: $(7, 1) \sim (8, 2)$, since $7+2=1+8$

$(8, 2) \sim (9, 3)$, since $8+3=2+9$

Thus, $\{(7, 1), (8, 2), (9, 3), (10, 4), \ldots \}$ is an equivalence class.

2.13. *Addition and Multiplication of Integers.*

Theorem 21. *The addition and multiplication of integers will be defined according to the following rules :—*

$$[a, b] + [c, d] = [a + c, b + d]$$

$$[a, b] \bullet [c, d] = [(a \cdot c) + (b \cdot d), (a \cdot d) + (b \cdot c)]$$

If this definition is to be meaningful, we must show that by using instead of $[a, b]$, $[c, d]$ other elements equivalent to them, $\left[Ex: [7, 2] = [8, 3]\right]$, the result is unaltered.

Proof. Let $[a, b] = [e, f]$ and $[c, d] = [h, k]$

$$\therefore a + f = b + e \text{ and } c + k = d + h \qquad (1)$$

(*i*) By the addition of natural numbers,

$$(a + f) + (c + k) = (b + e) + (d + h)$$

$$\therefore (a + c) + (f + k) = (b + d) + (e + h)$$

$$\therefore [(a + c), (b + d)] = [(e + h), (f + k)]$$

(*ii*) From (1), we have the eight equations.

$c.(a + f) = c.(b + e)$ $d.(b + e) = d.(a + f)$

$k.(b + e) = k.(a + f)$ $h.(a + f) = h.(b + e)$

$a.(c + k) = a.(d + h)$ $b.(d + h) = b.(c + k)$

$e.(c + k) = e.(d + h)$ $f.(d + h) = f.(c + k)$

(*Ex.* 1, Exercises 2.1)

ಉದಾಹರಣೆಗಳು $(7, 1) \sim (8, 2)$ ಏಕೆಂದರೆ $7+2 = 1+8$

$(8, 2) \sim (9, 3)$ ಏಕೆಂದರೆ $8+3 = 2+9$

ಹೀಗೆ $\left\{ (7, 1), (8, 2), (9, 3), (10, 4), \ldots \right\}$ ಒಂದು

ಸಮಾನತಾ ವರ್ಗ.

2.13 ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಸಂಕಲನ ಮತ್ತು ಗುಣಾಕಾರ.

ಪ್ರಮೇಯ 21. ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಸಂಕಲನ ಗುಣಾಕಾರಗಳನ್ನು

$$[a, b] + [c, d] = [a+c, \ b+d]$$

$$[a, b] \bullet [c, d] = [(a \cdot c) + (b \cdot d), (a \cdot d) + (b \cdot c)]$$

ಎಂಬ ನಿಯಮಗಳಿಗನುಸಾರವಾಗಿ ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸುವೆವು.

ಈ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಗೆ ಅರ್ಥವಿರಬೇಕಾದರೆ, $[a, b]$. $[c, d]$ ಗಳಿಗೆ ಬದಲು ಅವಕ್ಕೆ ಸಮಾನವಾದ ಇತರ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವುದರಿಂದ,

[ಉದಾ: $[7, 2] = [8, 3]$],

ಫಲಿತಾಂಶವು ವ್ಯತ್ಯಸ್ತಗೊಳ್ಳುವುದಿಲ್ಲ ಎಂದು ತೋರಿಸಬೇಕು.

ಸಾಧನೆ: $[a, b] = [e, f]$ ಮತ್ತು $[c, d] = [h, k]$ ಆಗಿರಲಿ.

$\therefore a+f = b+e$ ಮತ್ತು $c+k = d+h.$ (1)

(i) ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯಾಸಂಕಲನದಿಂದ,

$$(a+f) + (c+k) = (b+e) + (d+h)$$

$$\therefore (a+c) + (f+k) = (b+d) + (e+h)$$

$$\therefore [(a+c), (b+d)] = [(e+h), (f+k)].$$

(ii) (1) ರಿಂದ,

$c \cdot (a+f) = c \cdot (b+e)$ $\quad$ $d \cdot (b+e) = d \cdot (a+f)$

$k \cdot (b+e) = k \cdot (a+f)$ $\quad$ $h \cdot (a+f) = h \cdot (b+e)$

$a \cdot (c+k) = a \cdot (d+h)$ $\quad$ $b \cdot (d+h) = b \cdot (c+k)$

$e \cdot (c+k) = e \cdot (d+h)$ $\quad$ $f \cdot (d+h) = f \cdot (c+k)$

[ಅಭ್ಯಾಸ 2.1; ಉದಾ. 1.]

Using Theorems 4 and 6, we get by adding the left and right sides of these equations (all are natural numbers),

$$2(a.c) + 2(b.d) + 2(e.k) + 2(f.h) + (e.d) + (f.c) + (b.k) + (a.h) + (e.c) + (f.d) + (a.k) + (b.h)$$

$$= 2(a.d) + 2(b.c) + 2(e.h) + 2(f.k) + (e.d) + (f.c) + (b.k) + (a.h) + (e.c) + (f.d) + (a.k) + (b.h).$$

By the Laws of Cancellation (Theorems 12, 13), we get $(a.c) + (b.d) + (e.k) + (f.h) = (a.d) + (b.c) + (e.h) + (f.k)$.

Hence, $[(a.c) + (b.d), (a.d) + (b.c)] = [(e.h) + (f.k), (e.k) + (f.h)]$.

2·14. The set J and the operations of addition and multiplication given above complete the system of integers. The axioms of set theory and the axioms of the system of natural numbers cover the set J also. Therefore the properties of natural numbers that have been obtained by the help of these axioms hold good for the integers also.

Theorem 22. *The associative and commutative laws of addition, the associative and commutative laws of multiplication, and the distributive law of multiplication all hold good for the integers.*

In other words, Theorems 2, 3, 4, 5, 6, 7 are true for integers. As an example, we prove here the commutative laws.

(i) If $[a, b]$, $[c, d]$ are two integers,

$$[a, b] + [c, d] = [a + c, b + d]$$

and $[c, d] + [a, b] = [c + a, d + b]$

Now by the properties of natural numbers.

$$(c + a) + (b + d) = (d + b) + (a + c)$$

ಎಂಬ ಎಂಟು ಸಮೀಕರಣಗಳು ಒದಗುತ್ತವೆ. ಪ್ರಮೇಯ 4 ಮತ್ತು 6ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ, ಎಂಟು ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನೂ ಎಡಗಡೆ ಬಲಗಡೆಗಳಲ್ಲಿ ಸಂಕಲನ ಮಾಡಿದರೆ (ಎಲ್ಲವೂ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದ್ದರಿಂದ)

$2(a \cdot c) + 2(b \cdot d) + 2(e \cdot k) + 2(f \cdot h) + (e \cdot d) + (f \cdot c) + (b \cdot k) + (a \cdot h) + (e \cdot c) + (f \cdot d) + (a \cdot k) + (b \cdot h)$

$= 2(a \cdot d) + 2(b \cdot c) + 2(e \cdot h) + 2(f \cdot k) + (e \cdot d) + (f \cdot c) + (b \cdot k) + (a \cdot h) + (e \cdot c) + (f \cdot d) + (a \cdot k) + (b \cdot h)$

ನಿರಸನ ನಿಯಮ (ಪ್ರಮೇಯ 12, 13) ಗಳಿಂದ,

$(a \cdot c) + (b \cdot d) + (e \cdot k) + (f \cdot h) = (a \cdot d) + (b \cdot c) + (e \cdot h) + (f \cdot k)$ ಆದ್ದರಿಂದ,

$[(a \cdot c) + (b \cdot d), (a \cdot d) + (b \cdot c)] = [(e \cdot h) + (f \cdot k), (e \cdot k) + (f \cdot h)]$

2.14 J ಗಣವೂ ಮೇಲೆ ತಿಳಿಸಿದ ಸಂಕಲನ ಗುಣಾಕಾರ ಕ್ರಿಯೆಗಳೂ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ವ್ಯೂಹವನ್ನು ಪೂರ್ತಿಗೊಳಿಸುತ್ತದೆ. ಈ ಗಣಸಿದ್ಧಾಂತದ ಪ್ರಮಾಣಗಳೂ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯಾವ್ಯೂಹದ ಸ್ವತಸ್ಸಿದ್ಧಪ್ರಮಾಣಗಳೂ J ಗಣಕ್ಕೂ ವ್ಯಾಪಿಸುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ಪ್ರಮಾಣಗಳ ಸಹಾಯದಿಂದ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಪಡೆದಿರುವ ಗುಣಗಳು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಿಗೂ ನಿಜವಿರುತ್ತವೆ.

ಪ್ರಮೇಯ 22: ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಿಗೆ ಸಂಕಲನದ ಸಹವರ್ತನೆ, ಪರಿವರ್ತನೆಗಳ ನಿಯಮಗಳೂ ಗುಣಾಕಾರದ ಸಹವರ್ತನೆ ಪರಿವರ್ತನೆಗಳೂ ಗುಣಾಕಾರದ ವಿಭಾಜಕ ನಿಯಮವೂ ನಿಜವಿರುತ್ತವೆ.

ಎಂದರೆ, 2, 3, 4, 5, 6, 7ನೇ ಪ್ರಮೇಯಗಳು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಿಗೂ ಅನ್ವಯಿಸುತ್ತವೆ. ಮಾದರಿಗಾಗಿ ಪರಿವರ್ತನಾ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ಸಾಧಿಸುವೆವು.

(i) $[a, b]$, $[c, d]$ ಎರಡೂ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಾದರೆ,

$$[a, b] + [c, d] = [a + c, b + d]$$

ಮತ್ತು $[c, d] + [a, b] = [c + a, d + b]$

ಈಗ $(c + a) + (b + d) = (d + b) + (a + c)$,

[ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಗಳಿಂದ]

$$\therefore\ [c + a,\ d + b] = [a + c,\ b + d\,]$$

$$\therefore\ [a, b] \boldsymbol{+} [c, d] = [c, d] \boldsymbol{+} [a, b]$$

$$(ii)\ [a, b] \bullet [c, d] = [a.c] + (b.d),\ (a.d) + (b.c)\,]$$

$$\textit{and}\ [c, d] \bullet [a, b] = [(c, a) + (d.b),\ (c.b) + (d.a)\,]$$

That the numbers on the right side are the same is clear. Therefore the numbers on the left too are equal.

The student must prove the other theorems similarly.

2.15. Integers possess some properties not possessed by the natural numbers.

Theorem 23. *The set J has one addition-identity and one multiplication-identity.*

The identity or identity-element of addition means an element which when added to any number does not alter that number. In other words.

$$[x, y] \boldsymbol{+} \text{identity} = [x, y].$$

It can be easily seen that this identity number is $[a, a]$.

For $[x, y] \boldsymbol{+} [a, a] = [x + a, y + a]$, by the definition of the addition.

But $[x + a,\ y + a] = [x, y]$,

since $(x + a) + y = x + (a + y) = x + (y + a)$

$$= (y + a) + x.$$

In like manner the identity of multiplication is the number $[a+1, a]$. For

$$[x, y] \bullet [a+1, a] = [x.(a+1) + y.a,\ x.a + y.(a+1)],$$

by definition.

It is easy to see that the number on the right is equal to $[x, y]$.

$$\therefore [c + a, d + b] = [(a+c), (b + d)]$$

$$\therefore [a, b] \dotplus [c, d] = [c, d] \dotplus [a, b]$$

(ii) $[a, b] \bullet [c, d] = [(a \cdot c) + (b \cdot d), (a \cdot d) + (b \cdot c)]$

ಮತ್ತು $[c, d] \bullet [a, b = [(c \cdot a) + (d.b) (c,b) (d \cdot a)]$

ಬಲಗಡೆ ಇರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಒಂದೇ ಎಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟ. ಆದ್ದರಿಂದ ಎಡಗಡೆಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೂ ಒಂದೇ.

ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಇತರ ಪ್ರಮೇಯಗಳನ್ನು ಹೀಗೆಯೇ ಸಾಧಿಸಬೇಕು.

2.15 ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಇಲ್ಲದಿರುವ ಗುಣಗಳೂ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಿಗೆ ಕೆಲವು ಇವೆ.

ಪ್ರಮೇಯ 23. J ಗಣದಲ್ಲಿ ಸಂಕಲನದ ಒಂದು ಏಕವೂ ಗುಣಾಕಾರದ ಒಂದು ಏಕವೂ ಇರುತ್ತವೆ.

ಸಂಕಲನದ ಏಕ (identity element) ವೆಂದರೆ ಅರ್ಥವಿದು. ಯಾವ ಸಂಖ್ಯೆಗೇ ಆಗಲಿ "ಏಕ" ವನ್ನು ಸಂಕಲನ ಮಾಡಿದರೆ, ಸಂಖ್ಯೆಯು ವ್ಯತ್ಯಾಸಗೊಳ್ಳುವುದಿಲ್ಲ. ಎಂದರೆ

$[x, y] +$ ಏಕ $= [x, y]$

ಈ 'ಏಕ' ಸಂಖ್ಯೆ $[a, a]$ ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂದು ಸುಲಭವಾಗಿ ಕಾಣಬಹುದು. ಏಕೆಂದರೆ

$[x, y] \dotplus [a, a] = [x+a, y+a]$, ಸಂಕಲನ ವ್ಯಾಖ್ಯೆ.

ಆದರೆ $[x + a, y + a] = [x, y]$,

ಏಕೆಂದರೆ $(x + a) + y = x + (a + y) = x + (y + a)$

$$= (y + a) + x$$

ಇದೇ ಪ್ರಕಾರ, ಗುಣಾಕಾರದ ಏಕವು $[a + 1, a]$ ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆ. ಹೇಗೆಂದರೆ,

$[x, y] \bullet [a + 1, a] = [x \cdot (a + 1) + y \cdot a,$

$x \cdot a + y \cdot (a+1)]$ —ವ್ಯಾಖ್ಯೆ

ಬಲಗಡೆಯ ಸಂಖ್ಯೆಯು $[x, y]$ ಗೆ ಸಮ ಎಂದು ತೋರಿಸುವುದು ಸುಲಭ.

We shall hereafter call the identity for addition as the number *zero* (0), and the identity for multiplication as the number *one* (1). Therefore $[a, a]=0$, $[a+1, a]=1$.

Theorem 24. *The inverse of addition. For any integer* $[x, y]$, *there exists an integer* $[m, n]$ *such that*

$$[x, y] \oplus [m, n] = [a, a].$$

Proof. $[x, y] \oplus [y, x] = [x+y, y+x] = [a, a]$.

$$\therefore \quad [m, n] = [y, x]$$

Theorem 25. *Cancellation law for addition. If*

$$[a, b] \oplus [c, d] = [a, b] \oplus [e, f], \text{ then } [c, d] = [e, f]$$

Proof: Adding $[b, a]$ to both sides, and using the associative law,

$$[b, a] \oplus \{[a,b], [c, d]\} = \{[b, a] \oplus [a, b]\} \oplus [c, d]$$

$$= [b, b] \oplus [c, d] = [c, d]$$

Similarly the right side becomes $[e, f]$ $\therefore$ $[c, d] = [e, f]$.

2.16. It is now possible to introduce the concept of subtraction.

Definition. $[a, b] \oplus [d, c]$ *defines the operation of subtracting* $[c, d]$ *from* $[a, b]$, *and will be written* $[a, b] - [c, d]$.

We have proved in Theorem 21, that the operation of addition determines a fixed number. Therefore $[a, b] - [c, d]$ is also a fixed number. In other words,

if $[a, b] = [e, f]$ and $[c, d] = [h, k]$

then $[a, b] - [c, d] = [e, f] - [h, k]$

Let now $[m, n]$ be a given number. The function

ಸಂಕಲನದ ಏಕವನ್ನು **ಸೊನ್ನೆ** (zero) ಎಂದೂ, ಗುಣಾಕಾರದ ಏಕವನ್ನು **ಒಂದು** ಎಂದೂ ಮುಂದೆ ಕರೆಯುವೆವು. ಎಂದರೆ, $[a, a] = 0$, $[a+1, a] = 1$

ಪ್ರಮೇಯ 24. ಸಂಕಲನದ ಪ್ರತಿಲೋಮ (inverse). **ಯಾವುದೇ ಪೂರ್ಣಾಂಕ** $[x, y]$ **ಗೆ**

$$[x, y] \dotplus [m, n] = [a, a]$$

ಆಗಿರುವಂತೆ, ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕ $[m, n]$ **ಇರುತ್ತದೆ.**

ಸಾಧನೆ : $[x, y] \dotplus [y, x] = [x+y, y+x] = [a, a]$.
ಆದ್ದರಿಂದ, $[m, n] = [y, x]$.

ಪ್ರಮೇಯ 25. ಸಂಕಲನದ ನಿರಸನ ಕ್ರಿಯೆ.

$[a, b] \dotplus [c, d] = [a, b] \dotplus [e, f]$ ಆದರೆ, $[c, d] = [e, f]$

ಸಾಧನೆ : ಎರಡೂ ಕಡೆಗಳಿಗೂ $[b, a]$ ಯನ್ನು ಸಂಕಲನ ಮಾಡಿ (ಕೂಡಿ), ಸಹವರ್ತನ ನಿಯಮವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವುದರಿಂದ,

$$[b, a] \dotplus \{[a, b] + [c, d]\} = \{[b, a] \dotplus [a, b]\} \dotplus [c, d]$$
$$= [b, b] \dotplus [c, d] = [c, d]$$

ಹೀಗೆಯೇ ಬಲಪಾರ್ಶ್ವ $= [e, f]$ ಆಗುತ್ತದೆ. $\therefore [c, d] = [e, f]$

2.16. ಈಗ ವ್ಯವಕಲನ ಕ್ರಿಯೆ ಯನ್ನು ಭಾವನೆಗೊಳಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗಿದೆ.

ವ್ಯಾಖ್ಯೆ. $[a, b] \dotplus [d, c]$ **ಯನ್ನು** $[a, b]$ **ಯಲ್ಲಿ** $[c, d]$ **ನ್ನು ವ್ಯವಕಲನ ಮಾಡುವ ಕ್ರಿಯೆ ಎಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯೆ ಮಾಡಿ ಇದನ್ನು** $[a, b] - [c, d]$ **ಎಂದು ಬರೆಯುವೆವು.** ಪ್ರಮೇಯ 21ರಲ್ಲಿ ಸಂಕಲನವು ಒಂದು ಸ್ಥಿರ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕೊಡುವುದು ಎಂದು ತೋರಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $[a, b] - [c, d]$ ಸಹ ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಸಂಖ್ಯೆ. ಅರ್ಥಾತ್, $[a, b] = [e, f]$ ಮತ್ತು $[c, d] = [h, k]$ ಆದರೆ, $[a, b] - [c, d] = [e, f] - [h, k]$.

ಈಗ, $[m, n]$ ಒಂದು ದತ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರಲಿ.

$$F : [x, y] \rightarrow [x, y] \mathbin{-\!\!\!\!\mid\!\!\!\!-} [m, n]$$

maps the set J upon itself. How many integers are there having $[a, b]$ as the image? In the older language, this means solving the equation

$$[x, y] \mathbin{-\!\!\!\!\mid\!\!\!\!-} [m, n] = [a, b].$$

Subtract $[m, n]$ from both sides i.e. add $[n, m]$.

$$[m, n] \mathbin{-\!\!\!\!\mid\!\!\!\!-} [n, m] = [c, c],$$

$$\therefore \quad [x, y] = [a+n, \ b+m].$$

This is the only solution. For if possible, let $[x', y']$ be another solution.

$$\therefore \quad [a, b] = [x, y] \mathbin{-\!\!\!\!\mid\!\!\!\!-} [m, n] = [x', y'] \mathbin{-\!\!\!\!\mid\!\!\!\!-} [m, n]$$

By the cancellation law (Theorem 25)

$$[x, y] = [x', \ y']$$

2.17. *Ordering the integers.*

Definition. *We say that* $[a, b] \boldsymbol{>} [c, d]$ *if* $a + d > b+c$. We read this as $[a, b]$ "is greater than" $[c, d]$. We also write this as $[c, d] \boldsymbol{<} [a, b]$ and say that $[c, d]$ "is less than" $[a, b]$

To justify the definition, we must prove that if $[a, b] = [a', b']$ and $[c, d] = [c' \ d']$, then when $[a, b] \boldsymbol{>} [c, d]$ we have also $[a', b'] \boldsymbol{>} [c', d']$

Now $a + b' = a' + b, \ c + d' = c' + d$ (i) (2.12)

Let $a + d > b + c$

Add $b' + d'$ to both sides. (Theorem 11)

$\therefore (a + d) + (b' + d') > (b + c) + (b' + d')$

By the associative law, and using (i),

$$F : [x, y] \rightarrow [x, y] + [m, n]$$

ಎಂಬ ಉತ್ಪನ್ನವು J ಗಣವನ್ನು ಅದರ ಮೇಲೆಯೇ ಚಿತ್ರಿಸುತ್ತದೆ. $[a, b]$ ನ್ನು ಛಾಯೆಯಾಗಿ ಉಳ್ಳ ಎಷ್ಟು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಿವೆ ? ಹಳೆಯ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ,

$$[x, y] + [m, n] = [a, b]$$

ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಸಾಧಿಸಿ.

ಎರಡು ಕಡೆಗಳಿಂದಲೂ $[m, n]$ ಕಳೆಯಿರಿ, ಎಂದರೆ $[n, m]$ ಸಂಕಲನ ಮಾಡಿರಿ ("ಕೂಡಿರಿ"). $[m, n] + [n, m] = [c. c]$

$$\therefore [x, y] = [a + n, b + m]$$

ಇದು ಒಂದೇ ಮೂಲ. ಸಾಧ್ಯವಿದ್ದಲ್ಲಿ $[x' y']$ ಇನ್ನೊಂದು ಮೂಲವಿರಲಿ.

$$\therefore [a, b] = [x, y] + [m, n] = [x', y'] + [m, n]$$

ನಿರಸನ ನಿಯಮ ಪ್ರಮೇಯ 25ರಿಂದ, $[x, y] = [x', y']$

2.17 ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಲ್ಲಿ ಕ್ರಮರಚನೆ

ವ್ಯಾಖ್ಯೆ. $a + d > b + c$ ಆದಲ್ಲಿ, $[a, b] > [c, d]$ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಇದನ್ನು $[c, d]$ ಗಿಂತ $[a, b]$ "ದೊಡ್ಡದು" ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ. ಇದನ್ನು $[c, d] < [a, b]$ ಎಂದೂ ಬರೆದು, $[a, b]$ ಗಿಂತ $[c, d]$ ಕಡಿಮೆ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸಮರ್ಥಿಸಲು, $[a, b] = [a', b']$ ಮತ್ತು $[c, d] = [c', d']$ ಆದರೆ, $[a, b] > [c, d]$ ಆದಾಗ, $[a'. b'] > [c', d']$ ಎಂದು ತೋರಿಸಬೇಕು.

ಈಗ $a+b' = a' + b$ ಮತ್ತು $c+d' = c'+d$ (2.12) (i)

ಈಗ $a+d > b + c$ ಆಗಿರಲಿ.

ಎರಡು ಕಡೆಗೂ $b' + d'$ ಕೂಡಿ. (ಪ್ರಮೇಯ 11)

$$\therefore (a + d) + (b' + d') > (b + c) + (b' + d')$$

ಸಹವರ್ತನೆಯಿಂದ ಸಮೀಕರಣ (i) ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ

$$(a'+d') + (b + d) > (b' + c') + (b + d)$$

$$\therefore a' + d' > b' + c' \text{ or } [a', b'] \succ [c' d']$$

Theorem 26. *Trichotomy. If $[a, b]$, $[c, d]$ are integers one and only one of the following is true.*

$$[a, b] = [c, d], [a, b] \succ [c, d], [c, d] \succ [a, b]$$

This results at once from the trichotomy property of the natural numbers $a + d$, $b + c$.

Theorem 27. *Transitive Property. If $[a, b] \succ [c, d]$ and $[c, d] \succ [e, f]$, then $[a, b] \succ [e, f]$*

We have $a + d > b + c$

$$c + f > d + e$$

$$\therefore (a + f) + (c + d) > (b + e) + (c + d)$$

$$\therefore a + f > b + e \text{ i.e. } [a, b] \succ [e, f]$$

As a consequence of the above two theorems, the symbol $\succ$ establishes a linear order amongst the integers. See § 2.7 and Theorem 10.

Other inequalities concerning integers can be obtained in the same way as the corresponding results for natural numbers.

Theorem 28.

(1) *We have $[a, b] \dotplus [c, d] \succ [a, b] \dotplus [e, f]$, if and only if $[c, d] \succ [e, f]$*

(2) *If $[x, y] \succ [a, a]$, then $[x, y] \bullet [c, d] \succ [x, y] \bullet [e, f]$ if and only if $[c, d] \succ [e, f]$*

$$(a' + d') + (b + d) > (b' + c') + (b + d)$$

$\therefore a' + d' > b' + c'$ ಅಥವಾ $[a', b'] > [c', d']$

ಪ್ರಮೇಯ 26. ತ್ರಿಚ್ಛೇದ್ಯತೆ. $[a, b], [c, d]$ **ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಾದರೆ, ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು, ಒಂದು ಮಾತ್ರ ನಿಜ.**

$[a, b] = [c, d]$, $[a, b] > [c, d]$, $[c, d] > [a, b]$ ಸ್ವಭಾವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದ $a + d$, $b + c$ ಗಳಿಗೆ ತ್ರಿಚ್ಛೇದ್ಯತೆ ಇರುವುದರಿಂದ ಇದು ಒಡನೆಯೇ ಫಲಿಸುತ್ತದೆ.

ಪ್ರಮೇಯ 27. ವಾಹಕಗುಣ. $[a, b] > [c, d]$ **ಮತ್ತು** $[c, d] > [e, f]$ ಆದರೆ, $[a, b] > [e, f]$

$$a + d > b + c$$

$$c + f > d + e$$

$$\therefore (a + f) + (c + d) > (b + c) + (c + d)$$

$\therefore a + f > b + e$ ಎಂದರೆ $[a, b] > [e, f]$

ಮೇಲಿನ ಎರಡು ಪ್ರಮೇಯಗಳ ಪರಿಣಾಮವಾಗಿ, $>$ ಚಿಹ್ನೆಯು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಲ್ಲಿ ಸಾಲುಕ್ರಮವನ್ನು ಏರ್ಪಡಿಸುತ್ತದೆ. § 2.7 ಮತ್ತು ಪ್ರಮೇಯ 10 ನೋಡಿ.

ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು ಕುರಿತು ಇತರ ಅಸಮಾನತೆಯ ಗುಣಗಳನ್ನು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಗಳಂತೆಯೇ ಪಡೆಯಬಹುದು.

ಪ್ರಮೇಯ 28.

(1) $[c, d] > [e, f]$ ಆದಾಗ, ಆದಾಗ ಮಾತ್ರ

$$[a, b] + [c, d] > [a, b] + [e, f]$$

(2) $[x, y] > [a, a]$ ಆಗಿದ್ದು $[c, d] > [e, f]$ ಆದಾಗ, ಆದಾಗ ಮಾತ್ರ

$$[x, y] \bullet [c, d] > [x, y] \bullet [e, f]$$

(3) If $[x, y] < [a, a]$, *then*

$[x, y] \bullet [c, d] > [x, y] \bullet [e, f]$ *if and only if*

$[c, d] < [e, f]$.

There is no theorem for natural numbers analogous to (3). We shall prove only (3). The student can easily prove the other two.

Given: $[c, d] < [e, f]$ and $[x, y] < [a, a]$

i.e. $c+f < d+e$ and $x+a < y+a$.

Hence natural numbers m, n exist such that

$d+e = (c+f)+m$ and $y = x+n$.

$\therefore \quad y.(d+e) = y.(c+f) + y.m$

and $(x+n)\cdot(c+f) + (x+n)\cdot(d+e)$.

By adding,

$$(x.c)+(y.d)+(x.f)+(y.e)+(x.m)+n.(c+f)+(n.m)$$

$$=(x.d)+(y.c)+(x.e)+(y.f)+y.m.+n.(d+e)$$

But $(x.m)+(n.m) = (y.m)$

and $n.(c+f)+n.m = n.(d+e)$

$$\therefore \quad \{(x, c)+(y.d)+(x.f)+(y.e)\} + [(x.m)+n.(c+f)+[n.m]$$

$$= \{(x.d)+(y.c)+(x.e)+(y.f)\} + [(x.m)+[n.m)+n.(e+f)]+(n.m)$$

The three terms in the square brackets cancel.

$$\therefore \quad (x, c)+(y.d)+(x.f)+(y.e) > (x.d)+(y.c)+(x.e)+(y.f)$$

(3) $[x, y] < [a, a]$ ಆಗಿದ್ದು $[c, d] < [e, f]$ ಆದಾಗ,
ಆದಾಗ ಮಾತ್ರ $[x, y] \bullet [c, d] > [x, y] \bullet [e, f]$

ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಬಗ್ಗ (3) ನ್ನು ಹೋಲುವ ಪ್ರಮೇಯವಿಲ್ಲ. (3)ಕ್ಕೆ ಮಾತ್ರ ಸಾಧನೆಯನ್ನು ಕೊಡುವೆವು. ಉಳಿದೆರಡನ್ನು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯು ತಾನೇ ಸಾಧಿಸ ಬಲ್ಲನು.

ದತ್ತ. $[c, d] < [e, f]$ ಮತ್ತು $[x, y] < [a, a]$ ಎಂದರೆ
$c + f < d + e$ ಮತ್ತು $x + a < y + a$

ಎಂದರೆ $d + e = (c+f) + m$ ಮತ್ತು $y=x + n$ ಆಗುವಂತೆ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು m, n ಇರುತ್ತವೆ.

$\therefore y \cdot (d + e) = y \cdot (c + f) + y \cdot m$

ಮತ್ತು $(x+n) \cdot (c + f) + (x+n) \cdot m = (x+n) \cdot (d+e)$.
ಕೂಡುವುದರಿಂದ,

$$(x.c) + (y \cdot d) + (x \cdot f) + (y . e) + (x \cdot m) + n \cdot (c + f) + (n \cdot m)$$

$$= (x . d) + (y . c) + (x \cdot e) + (y \cdot f) + y \cdot m + n \cdot (d + e)$$

ಆದರೆ $(x \cdot m) + (n . m) = y \cdot m$

ಮತ್ತು $n \cdot (c + f) + n \cdot m = n \cdot (d + e)$

$$\therefore \{(x \cdot c) + (y . d) + (x . f) + (y . e)\} + [(x \cdot m) + n \cdot (c + f) + n . m]$$

$$= \{(x \cdot d) + (y . c) + (x . e) + (y \cdot f)\} + [(x \cdot m) + (n \cdot m) + n \cdot (c + f)] + n \cdot m$$

[ ] ಆವರಣದಲ್ಲಿರುವ ಮೂರು ಪದಗಳು ನಿರಸನ ಹೊಂದುತ್ತವೆ.

$$\therefore (x \cdot c) + (y \cdot d) + (x \cdot f) + (y \cdot c) > (x \cdot d) + (y \cdot c)$$
$$(+x, e) + (y \cdot f)$$

Hence by the definition of multiplication [Theorem 22 (ii)]

$[x, y] \bullet [c, d] > [x, y] \bullet [e, f]$

Conversely, if $[x, y] \bullet [c, d] > [x, y] \bullet [e, f]$

and $[x, y] < [a, a]$

We must prove that $[c, d] < [e, f]$

By trichotomy, we have either $[c, d] < [e, f]$ (i)

or $[c, d] = [e, f]$ (ii)

or $[c, d] < [e, f]$ (iii)

If (*i*) is true, $[e, f] < [c, d]$. Hence as above shown,

$[x, y] \bullet [e, f] > [x, y] \bullet [c, d]$

or $[x, y] \bullet [c, d] > [x, y] \bullet [e, f]$

This is contrary to the hypothesis. Hence (i) cannot be true.

Similarly, if (ii) is true $[x, y] \bullet [c, d] = [x, y] \bullet [e, f]$, again contrary to the hypothesis.

Therefore, (iii) must be true.

2.18. Definitions.

(1) *If* $[x, y] > [a, a]$, $[x, y]$ *is called a positive integer.*

(2) *If* $[x, y] = [a, a]$, $[x, y]$ *is called zero*

(3) *If* $[x, y] < [a, a]$, $[x, y]$ *is called a negative integer*

$[x, y] > [a, a]$ means that $x + a > y + a$

$\therefore \quad x > y.$

Therefore $[x, y]$ is a positive integer, if $x > y$.

ಆದ್ದರಿಂದ ಗುಣಾಕಾರದ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯಿಂದ (ಪ್ರಮೇಯ 22 (ii))

$[x, y] \bullet [c, d] > [x, y] \bullet [e, f]$

ವಿಲೋಮವಾಗಿ,

$$[x, y] \bullet [c, d] > [x, y] \cdot [e, f]$$

ಮತ್ತು $[x, y] < [a, a]$ ಆಗಿರಲಿ.

$[c, d] < [e, f]$ ಎಂದು ತೋರಿಸಬೇಕು.

ತ್ರಿಚ್ಛೇದ್ಯತೆಯಿಂದ $[c, d] > [e, f]$ (i)

ಇಲ್ಲವೇ, $[c, d] = [e, f]$ [ii]

ಇಲ್ಲವೇ $[c, d] < [e, f]$ ಆಗಿರಬೇಕು (iii)

(i) ನಿಜವಿದ್ದರೆ, $[e, f] < [c, d]$ ಆಗುತ್ತದೆ. ಮೇಲೆ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ,

$$[x, y] \bullet [e, f] > [x, y] \bullet [c, d] \text{ ಆಗುತ್ತದೆ.}$$

ಎಂದರೆ $[x, y] \bullet [c, d] > [x, y] \bullet [e, f]$

ಇದು ದತ್ತಕ್ಕೆ ವಿರುದ್ಧ. ಆದ್ದರಿಂದ (i) ನಿಜವಾಗಲಾರದು. ಹೀಗೆಯೇ, (ii) ನಿಜವಿದ್ದರೆ, $[x, y] \bullet [c, d] = [x, y] \bullet [e, f]$, ಪುನಃ ದತ್ತಕ್ಕೆ ವಿರುದ್ಧ.

ಆದ್ದರಿಂದ (iii) ನಿಜವಿರಬೇಕು.

2.18. ವ್ಯಾಖ್ಯೆಗಳು.

(1) $[x, y] > [a, a]$ ಆದರೆ $[x, y]$ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಎಂದೂ

(2) $[x, y] = [a, a]$ ಆದರೆ, $[x, y]$ ಸೊನ್ನೆ ಎಂದೂ

(3) $[x, y] < [a, a]$ ಆದರೆ, $[x, y]$ ಋಣಪೂರ್ಣಾಂಕ ಎಂದೂ ಕರೆಯಲ್ಪಡುವುದು.

$[x, y] > [a, a]$ ಎಂದರೆ $x + a > [y + a]$

$\therefore x > y$

ಆದ್ದರಿಂದ $[x, y]$ ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕವಾಗಲು, $x > y$ ಆಗಿರಬೇಕು.

Similarly $[x, y]$ is a negative integer, if $x < y$.

$[x, y]$ is zero, if $x+a = y+a$ i.e. if $x=y$.

We have now introduced zero and negative integers into our mathematics. We can hereafter use the familiar symbol 0 for zero. For any natural number a, $[a, a] = 0$.

Theorem 29. The product of two integers is,

(i) positive, when both are positive

(ii) positive, when both are negative

(iii) negative when one is positive, the other negative.

Let $[a, b]$, $[c, d]$ be both negative.

i.e. $[a, b] \lessdot [x, x]$, and $[c, d] \lessdot [x, x]$.

By Theorem 28 (3),

$$[a, b] \bullet [c, d] \gtrdot [a, b] \bullet [x, x].$$

But $[a, b] \bullet [x, x] = \{ (a. x) + (b. x), (a. x) + (b. x) \}$

$$= [x, x]$$

$\therefore$ $[a, b] \bullet [c, d]$ is positive

The other two should be proved similarly.

2.19. From the natural numbers, we constructed numbers called "integers", and classified these as positive numbers, negative numbers, and zero. We might have already intuitively identified the positive integers with the natural numbers. However, this must be worked out logically. This last stage will now be worked out. Before we proceed to this, it should be remembered that an "integer" is an "equivalence class" Thus [5, 3], [6, 4], , [100, 98] is an equivalence class, an integer.

Let $[x, y]$ be a positive integer, By definition, there exists a natural number n, such that $x = y + n$, Therefore, let us write

ಹೀಗೆಯೇ $[x, y]$ ಋಣ ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾಗಲು, $x < y$ ಆಗಿರಬೇಕು. $[x, y]$ ಸೊನ್ನೆಯಾಗಲು, $x+a=y+a$, ಅಥವಾ $x=y$.

ಇಲ್ಲಿಗೆ ಸೊನ್ನೆ ಮತ್ತು ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಋಣ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ನಮ್ಮ ಗಣಿತಕ್ಕೆ ತಂದಂದಾಯಿತು, ಸೊನ್ನೆಗೆ ಬಳಕೆಯಲ್ಲಿರುವ 0 ಚಿಹ್ನೆಯನ್ನೇ ಇನ್ನು ಮೇಲೆ ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು, ಮತ್ತು ಯಾವುದೇ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ aಗೆ, $[a,a]=0$

ಪ್ರಮೇಯ 29. ಎರಡು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು

(i) ಎರಡೂ ಧನವಾದಾಗ ಧನ

(ii) ಎರಡೂ ಋಣವಾದಾಗ ಧನ

(iii) ಒಂದು ಧನ, ಒಂದು ಋಣವಾದಾಗ ಋಣ.

$[a, b]$, $[c, d]$ ಎರಡೂ ಋಣವಿರಲಿ.

ಎಂದರೆ $[a, b] < [x,x]$ ಮತ್ತು $[c, d] > [x, x]$

ಪ್ರಮೇಯ 28 (3) ರಿಂದ,

$$[a, b] \bullet [c, d] > [a, b] \bullet [x, x].$$

ಆದರೆ, $[a, b] \bullet [x, x] = \{(a\cdot x) + (b\cdot x), (a\cdot x) + (b\cdot x)\}$

$$= (x, x)$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $[a, b] \bullet [c, d]$ ಧನ ಸಂಖ್ಯೆ.

ಹೀಗೆಯೇ ಇನ್ನೆರಡನ್ನೂ ಸಾಧಿಸಬೇಕು.

2. 19. ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಂದ "ಪೂರ್ಣಾಂಕ"ಗಳೆಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡಿದೆವು, ಅವುಗಳನ್ನು ಧನ ಋಣ ಸೊನ್ನೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿ ವಿಂಗಡಿಸಿದೆವು. ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನೇ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೆಂದು ನಮ್ಮ ಅಂತರ್ಬೋಧೆಯಿಂದ ಈಗಾಗಲೇ ಕರೆದೂ ಇರಬಹುದು. ಆದರೂ ಇದನ್ನು ತರ್ಕಯುಂತವಾಗಿ ಪಡೆಯ ಬೇಕು. ಈ ಕಡೆಯ ಹಂತವನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ಕೊಡುವೆವು. ಇದಕ್ಕೆ ಮುನ್ನ, "ಪೂರ್ಣಾಂಕ" ಎಂಬುದು ಒಂದು "ಸಮಾನತಾವರ್ಗ" ಎಂಬುದನ್ನು ನೆನಪಿನಲ್ಲಿಡತಕ್ಕದ್ದು.

$[5, 3]$, $[6,4]$, ... $[100, 98]$, ... ಒಂದು ಸಮಾನತಾವರ್ಗ, ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕ,

ಈಗ $[x.y]$ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾಗಿರಲಿ. ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯಂತೆ, $x=y+n$ ಆಗಿರುವಂತೆ, ಒಂದು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ n ಇರುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, $[x,y]$ಗೆ ಬದಲು

$[y+n,y]$ instead of n. Now $[y+n,y]=[z+n, z]=[t+n,t]=$ . . . Therefore a one-to-one correspondence is set up between positive integers and natural numbers The natural number n corresponds to the integer $[y+n, y]$, and this integer corresponds to n.

Let P denote the set of positive integers. These are acted upon by the two operations $\boldsymbol{+}$ $\bullet$. The set of natural numbers N is acted upon by the operations $+, \cdot$ Let us now make $\boldsymbol{+}$ correspond to $+$, and $\bullet$ with $\cdot$ The function

$$F: \ [y+n, y] \to n$$

is a function which maps the set of positive integers upon the set of natural numbers. In this mapping, the operations $\boldsymbol{+}$, $\bullet$ correspond to $+, \cdot$ In other words, the "sum" of two positive numbers in P corresponds to the sum of their images in N. Similarly, for products.

For, $[x+m, x]+[y+n, y]=[(x+y)+m+n, x+y]$

$$\therefore F\Big([x+m, x]+[y+n, y]\Big)=m+n.$$

$$\text{Similarly } F\Big([x+m, x]\bullet[y+n, y]\Big)=mn$$

This property is called *isomorphism.*

Definition. *A set $\{S\}$ is acted upon by the operations $\{O\}$; another set $\{S'\}$ is acted upon by the operations $\{O'\}$. If a one-to-one correspondence exists between the elements of $\{S\}$ and of $\{S'\}$, and if it is also possible to make the operations $\{O\}$ correspond with $\{O'\}$, the system $\{S, O\}$ is said to be isomorphic with the system $\{S', O'\}$.* Thus, we have

Theorem 30. *The set of positive integers is isomorphic with the set of natural numbers.*

$[y+n,y]$ ಎಂದು ಬರೆಯೋಣ. $[y+n\cdot y]=[z+n,z]=[t+n,t]=\ldots$ ಆದ್ದರಿಂದ, ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಿಗೂ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೂ ಏಕಏಕ ಹೊಂದಾಣಿಕೆ ಒದಗುತ್ತದೆ. $[y+n,y]$ ಪೂರ್ಣಾಂಕಕ್ಕೆ n ಎಂಬ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಯೂ, nಗೆ $[y+n,y]$ ಎಂಬ ಪೂರ್ಣಾಂಕವೂ ಪರಸ್ಪರ ಸೇರುತ್ತವೆ.

ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗಣವನ್ನು P ಎಂದು ಕರೆಯೋಣ. ಇವುಗಳನ್ನು ಕುರಿತು $+\!\!\!|$, $\bullet$ ಎಂಬ ಪರಿಕರ್ಮಗಳಿವೆ. ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯಾಗಣ Nಗೆ $+$, $.$ ಎಂಬ ಪರಿಕರ್ಮಗಳಿವೆ. $+\!\!\!|$ನ್ನು $+$ ಒಡನೆಯೂ, $\bullet$ ನ್ನು $.$ ಒಡನೆಯೂ ಹೊಂದಾಣಿಕೆ ಹೊಂದಿಸುವ.

$$F: \ [y+n,y] \to n$$

ಎಂಬ ಉತ್ಪನ್ನವು ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗಣವನ್ನು ಸ್ವಾಭಾವಿಕಗಣದ ಮೇಲಕ್ಕೆ ಚಿತ್ರಿಸುತ್ತದೆ. ಈ ಚಿತ್ರಣದಲ್ಲಿ, $+\!\!\!|$ $\bullet$ ಪರಿಕರ್ಮಗಳು $+$, $.$ ಒಂದಿಗೆ ಹೊಂದಿಕೊಳ್ಳುತ್ತವೆ. ಎಂದರೆ, P ಗಣದಲ್ಲಿ ಎರಡು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ "ಮೊತ್ತ"ವು, N ಗಣದಲ್ಲಿ ಅವುಗಳ ಛಾಯೆಗಳ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಹೊಂದಿಕೊಳ್ಳುತ್ತದೆ. ಹೀಗೆಯೇ ಗುಣಲಬ್ಧಕ್ಕೂ.

ಹೇಗೆಂದರೆ:- $[x+m,x] +\!\!\!| [y+n,y]=[(x+y)+m+n,\ x+y]$

ಆದ್ದರಿಂದ $$F\Big([x+m,x]+[y+n,y]\Big)=m+n$$

ಹೀಗೆಯೇ $$F\Big([x+m,x]\bullet[y+n,y]\Big)=m\ n$$

ಇಲ್ಲಿ ಕಂಡು ಬರುವ ಗುಣವನ್ನು **ಸಮಾನುಕ್ರಮಣ** ಎಂದು ಕರೆಯುವೆವು.

ವ್ಯಾಖ್ಯೆ. ಒಂದು ಗಣ $\{S\}$, ಅದರ ಮೇಲಣ ಪರಿಕರ್ಮಗಳು $\{O\}$; ಮತ್ತೊಂದು ಗಣ $\{S'\}$ ಅದರ ಮೇಲಣ ಪರಿಕ್ರಮಗಳು $\{O'\}$ $\{S\}$ ನ ಅಂಶಗಳಿಗೂ $\{S'\}$ ನ ಅಂಶಗಳಿಗೂ ಒಂದು. ಒಂದು ಹೊಂದಾಣಿಕೆ ಇದ್ದು, ಪರಿಕರ್ಮ $\{O\}$ ಗಳಿಗೂ $\{O'\}$ ಗಳಿಗೂ ಹೊಂದಿಸಲು ಆದರೆ, $\{S,O\}$ ವ್ಯೂಹವು $\{S',O'\}$ ವ್ಯೂಹದೊಡನೆ ಸಮಾನುಕ್ರಮಣ ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, **ಪ್ರಮೇಯ 30. ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗಣವು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಗಣದೊಡನೆ ಸಮಾನುಕ್ರಮಣ ಹೊಂದಿದೆ.**

Henceforward, we shall thus consider the positive integers *themselves* as the natural numbers. Further, $\dotplus$ and $+$, $\bullet$ and $\cdot$ give identical meanings. Hereafter we can use the natural number 2 instead of [5, 3], [7, 5], [100, 98],...

The equation $[a+3, a] \dotplus [b+4, b] = [x+7, x]$ may be replaced by $3+4=7$.

Hereafter we shall use the symbol 0 in place of $[a, a]$. There exists a one-to-one correspondence between positive integers and negative integers, since $[x, y] \leftrightarrow [y, x]$.

We shall write $-n$ for the negative integer $[y, y+n]$.

The set of integers, which we have denoted by J thus contains the positive integers 1, 2, 3, ..., the number 0, and the negative integers $-1, -2, -3$, ...

Exercises 2.2

1 Prove that the numbers zero and one are unique.

2 A railway train has three classes of passengers. These classes form a partition of the passengers. Write this as an equivalence relation.
[a, b are two passengers : $a\ R\ b$, if both are passengers of the same class].

3 Write down as an equivalence relation the partition of a group of people into men and women.

4 Show that the following integers are equal.

(i) $[9, 6]$, $[10, 7]$, $[15, 12]$, $[100, 97]$

(ii) $[2, 4]$, $[6, 8]$, $[75, 77]$, $[a, a+2]$

(iii) $[1, 1]$, $[4, 4]$, $[a+1, a+1]$, $[x^2, x^2]$

What are these integers, in the usual notation ?

ಆದ್ದರಿಂದ, ಇನ್ನು ಮುಂದೆ ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳೇ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೆಂದು ಭಾವಿಸುತ್ತೇವೆ. ಹಾಗೂ $\dotplus$ ಮತ್ತು $+$, $\bullet$ ಮತ್ತು $\cdot$ ಸಮಾನಾರ್ಥವನ್ನು ಕೊಡುತ್ತವೆ. ಇನ್ನು ಮುಂದೆ $[5, 3]$, $[7, 5]$, $[100, 98]$, ... ಬದಲು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ 2ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು.

$[a+3, a] \dotplus [b+4, b] = [x+7, x]$ ಗೆ ಬದಲು $3+4=7$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

ಇನ್ನು $[a, a]$ ಗೆ ಬದಲು 0 ಎಂಬ ಚಿಹ್ನೆಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವೆವು. ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಿಗೂ ಋಣಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಿಗೂ ಒಂದು ಒಂದು ಹೊಂದಾಣಿಕೆ ಇರುವುದರಿಂದ, ಹೇಗೆಂದರೆ $[x, y] \longleftrightarrow [y, x]$, $[y, y+n]$ ಎಂಬ ಋಣ ಪೂರ್ಣಾಂಕವನ್ನು $-n$ ಎಂದು ಬರೆಯುವೆವು.

ಈ ರೀತಿ J ಗಣ, ಎಂದರೆ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಗಣವು 1, 2, 3, ... ಇತ್ಯಾದಿ ಧನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನೂ, 0 ಯನ್ನೂ $-1, -2, -3,$ ... ಇತ್ಯಾದಿ ಋಣಸಂಖ್ಯೆ ಗಳನ್ನೂ ಕೂಡಿದೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ 2.2

1 ಸೊನ್ನೆ ಮತ್ತು ಒಂದು ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಏಕೈಕ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

2 ರೈಲುಗಾಡಿಯಲ್ಲಿ ಮೂರುದರ್ಜೆಯ ಪ್ರಯಾಣಿಕರಿರುವರು. ಈ ದರ್ಜೆ ಗಳು ಪ್ರಯಾಣಿಕರ ಒಂದು ವಿಂಗಡಣೆ. ಸಮಾನತಾ ಸಂಬಂಧದ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಇದನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ. [a, b ಇಬ್ಬರು ಪ್ರಯಾಣಿಕರು ; a R b, ಇಬ್ಬರೂ ಒಂದೇ ದರ್ಜೆಯ ಪ್ರಯಾಣಿಕರಾದಾಗ].

3 ಒಂದು ಗುಂಪಿನಲ್ಲಿರುವ ಸ್ತ್ರೀಪುರುಷರ ವಿಂಗಡಣೆಯಲ್ಲಿ ಸಮಾನತಾ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

4 ಕೆಳಗಿನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು ಒಂದೇ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ :

(*i*) $[9, 6]$, $[10, 7]$, $[15, 12]$, $[100, 97]$

(*ii*) $[2, 4]$, $[6, 8]$, $[75, 77]$, $[a, a+2]$

(*iii*) $[1, 1]$, $[4, 4]$, $[a+1, a+1]$ $[x^2, x^2]$.

ಹಳೆಯ ಸಂಕೇತದಲ್ಲಿ, ಈ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು ಯಾವುವು ?

5 Arrange in order the following integers:
$[8, 12], [6, 1], [9, 8], [7, 13], [55, 60], [70, 70], [x+5, x]$.

6 Prove that $[a, a] \bullet [c, d] = [a, a]$

7 If $[x, y]$ is a positive integer, prove that a natural number n exists such that $x = y + n$.

8 If $[a, b] > [c, d]$, there exists a positive integer $[e, f]$ such that $[a, b] = [c, d] + [e, f]$.

9 The sum and product of two positive integers are positive integers.

10 The sum of two negative integers is negative.

11 If $[x, y] \bullet [a, b] = [x, y] \bullet [c, d]$, $[x, y] \neq [a, a]$, prove that $[a, b] = [c, d]$. (Cancellation law for multiplication).

12 Prove that the positive integers, negative integers and zero form a partition of the integer set J. Write down its equivalence relation.

13 If the product of two integers is zero, prove that one at least of the given integers is zero.

---

5 ಕೆಳಗಿನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಜೋಡಿಸಿ :

[8,12], [6,1], [9,8,] [7, 13], [55, 60], [70, 70] $[x+5, x]$.

6 $[a, a] \bullet [c, d] = [a.a]$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

7 $[x, y]$ ಧನಾಂಕವಾದರೆ, $x = y+n$ ಆಗುವಂತೆ ಒಂದು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ n ಇರುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

8 $[a, b] > [c, d]$ ಆದರೆ, $[a, b] = [c, d] + [e, f]$ ಆಗುವಂತೆ ಒಂದು ಧನಸಂಖ್ಯೆ $[e, f]$ ಇರಬೇಕು.

9 ಎರಡು ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಮೊತ್ತವೂ ಗುಣಲಬ್ಧವೂ ಧನಸಂಖ್ಯೆಗಳು.

10 ಎರಡು ಋಣಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಮೊತ್ತವು ಋಣ.

11 $[x, y] \bullet [a, b] = [x, y] \bullet [c, d]$, $[x, y] \neq [a, a]$ ಆಗಿದ್ದರೆ, $[a, b] = [c, d]$. (ಗುಣಾಕಾರದ ನಿರಸನಕ್ರಿಯೆ).

12 ಋಣ, ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳೂ ಸೊನ್ನೆಯೂ ಸೇರಿ. ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಗಣ J ಯು ಒಂದು ವಿಂಗಡಣೆಯೆಂದು ತೋರಿಸಿ. ಇದರ ಸಮಾನತಾ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

13 ಎರಡು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು ಸೊನ್ನೆಯಾದರೆ, ದತ್ತಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದಾದರೂ ಸೊನ್ನೆಯಾಗಿರಬೇಕು.

Part 3. Rational Numbers

2.20. In Part 2, we introduced an equivalence relation $\sim$ on the set $N \times N$, and obtained the integers set J. We classified the integers into positive integers, negative integers, and zero. We adduced reasons in 2.19 to consider the positive integers themselves as the natural numbers, as the elements of the set N. Therefore the elements of the set J are 1, 2, 3, . . . , 0,—1,—2,—3,— . . .

We shall now obtain new numbers by introducing another equivalence relation. We shall remove the element 0 (zero) from the set J and call the resulting set as J^*, so that $J^* = J - \{0\}$.

Hereafter, the elements of J will be denoted by their old symbols a, b, c, d and so on, so that these denote positive integers or negative integers or zero.

Definition. *When $a.d = b.c$, we shall write this as $(a, b) \approx (c, d)$, and call it as a relation on the set $J \times J^*$.*

(Compare with 2.12)

Example: $(2, 3) \approx (4, 6)$

$(3, 5) \approx (9, 15)$

This will be an equivalence relation on $J \times J^*$. It is enough to prove the transitive property that is necessary for an equivalence relation.

Let $(a, b) \approx (c, d)$ and $(c, d) \approx (e, f)$

$\therefore \quad a.d = b.c \quad , \quad c.f = d.e.$

$\therefore \quad (a.d, f) = (b.c).f = b.(c.f) = b.(d.e)$

$\therefore \; d.(a.f) = d.(b.e)$

$\therefore \; (a.f) = (b.e)$. by cancellation.

Hence $(a, b) \approx (e, f)$.

ಭಾಗ 3. ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು (Rational Numbers)

2.20. ಭಾಗ 2ರಲ್ಲಿ $N \times N$ ಗಣದ ಮೇಲೆ $\sim$ ಎಂಬ ಒಂದು ಸಮಾನತಾ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಕಲ್ಪಿಸಿ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಗಣ Jನ್ನು ಪಡೆದೆವು. ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು, ಋಣಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು, ಸೊನ್ನೆ ಎಂದು ವಿಂಗಡಿಸಿದೆವು. ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನೇ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು, ಎಂದರೆ Nನ ಗಣಾಂಶಗಳು ಎಂದು ತಿಳಿಯಬಹುದಾಗಿ ಇದಕ್ಕೆ ಕಾರಣವನ್ನು 2.19ರಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಯಿತು. ಆದ್ದರಿಂದ J ಗಣದ ಅಂಶಗಳು 1, 2, 3 ..., 0, —1, —2, —3 ...

ಈಗ ಇನ್ನೊಂದು ಸಮಾನತಾ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಕಲ್ಪಿಸಿ ಹೊಸ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುವೆವು. J ಗಣದಿಂದ 0 ಎಂಬ ಅಂಶವನ್ನು ತೆಗೆದುಹಾಕಿ, ಉಳಿಯುವ ಗಣವನ್ನು J^* ಎಂದು ಕರೆಯೋಣ. ಎಂದರೆ, $J^* = J - \{0\}$.

ಇನ್ನು ಮುಂದೆ, J ಯ ಗಣಾಂಶಗಳನ್ನು a, b, c, d ಮುಂತಾದ ಹಳೆಯ ಚಿಹ್ನೆಗಳಿಂದಲೇ ನಿರೂಪಿಸೋಣ. ಎಂದರೆ ಇವು ಧನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು, ಅಥವಾ ಋಣ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು. ಸೊನ್ನೆಯೂ ಆಗಿರಬಹುದು.

ವ್ಯಾಖ್ಯೆ $a.d = b.c$ ಆದರೆ $(a, b) \approx (c, d)$ ಎಂದು ಬರೆದು, ಇದನ್ನು $J \times J^*$ ಗಣದ ಮೇಲಣ ಒಂದು ಸಂಬಂಧವೆನ್ನುವೆವು. (2.12 ರೊಡನೆ ಹೋಲಿಸಿ).

ಉದಾಹರಣೆ $(2,3) \approx (4,6)$

$(3,5) \approx (9,15)$

ಇದು $J \times J^*$ ಮೇಲಣ ಒಂದು ಸಮಾನತಾ ಸಂಬಂಧವಾಗುತ್ತದೆ. ಸಮಾನತಾ ಸಂಬಂಧಕ್ಕೆ ಅವಶ್ಯಕವಾಗುವ ವಾಹಕ ಗುಣವನ್ನು ತೋರಿಸಿದರೆ ಸಾಕು.

$(a, b) \approx (c, d)$ ಮತ್ತು $(c, d) \approx (e, f)$ ಆಗಿರಲಿ.

$\therefore\ a.d = b.c \quad , \quad c.f = d.e.$

$\therefore\ (a.d).f = (b.c).f = b.(c.f) = b.(d.e)$

$\therefore\ (d.(a.f) = d.(b.e)$

$\therefore\ (a.f) = (b.e)$. ಗುಣಾಕಾರ ನಿರಸನದಿಂದ

ಎಂದರೆ $(a, b) \approx (e, f)$

Definition. *The equivalence classes (or partitions) of the set $J \times J^*$ are called rational numbers.*

These will be denoted by the symbol a/b. Therefore the number a/b is the equivalence class

$a/b = \{(x, y); (x, y) \in J \times J^*; (a, b) \approx (x, y\}$. It is an element of the partition brought about on the set $J \times J^*$ by the relation $\approx$.

Example :2/3 is the set $\{(2, 3), (4, 6), (8, 12), (-6, -9), ..\}$

The set of rational numbers will be denoted by Q.

2.21. *Addition and Multiplication*. The addition and multiplication of two rational numbers a/b and c/d will be defined by the following rules:

$$a/b \text{ ad } c/d = \{(a.d) + (b.c)\} \Big/ (b.d)$$

$$a/b \text{ mul } c/d = (a \cdot c) \Big/ (b.d)$$

If neither b nor d is zero, $b.d$ too is not zero. Therefore the above numbers belong to the set Q. To justify the definitions, we must prove that they give the same numbers if we take a'/b' instead of a/b and c'/d' instead of c/d where $(a, b) \approx (a', b'\})$ and $(c, d) \approx (c', d')$.

$$\begin{aligned} \text{Now} \quad a.b' &= a', b \text{ and } c.d' = c'.d \\ \therefore \quad (a.b'), d.d' &= (a', b) \, . \, d.d' \\ \text{and} \quad (c.d') \, . \, b.b' &= (c'.d) \, . \, b.b' \\ \text{or} \quad (a.d) \, . \, (b'.d') &= (a'.d') \, . \, (b.d) \\ \text{and} \quad (b.c) \, . \, (b'.d') &= (b'.c') \, . \, (b.d) \end{aligned}$$

Adding, we have

$$(a.d+b.c) \, . \, (b'.d') = (a'.d'+b'.c') \, . \, (b.d)$$

Therefore $\dfrac{(a.d+b.c)}{(b.d)} = \dfrac{(a'.d)+b'.c')}{(b'.d')}$

Similarly for multiplication,

ವ್ಯಾಖ್ಯೆ. $J \times J^*$ **ಗಣದ ಸಮಾನತಾವರ್ಗಗಳನ್ನು** (**ಅಥವಾ ವಿಂಗಡಣೆಗಳನ್ನು**) **ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೆಂದು ಕರೆಯುವೆವು.** ಇವನ್ನು a/b ಚಿಹ್ನೆಯಿಂದ ಸೂಚಿಸುವೆವು. ಆದ್ದರಿಂದ a/b ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆ

$$a/b = \{(x, y) ; (x, y) \in J \times J^* ; (a, b) \approx (x, y)\}$$

ಎಂಬ ಸಮಾನತಾವರ್ಗ, $J \times J^*$ ಗಣದ ಮೇಲೆ $\approx$ ಸಂಬಂಧವು ತರುವ ವಿಂಗಡಣೆಯ ಒಂದು ಗಣಾಂಶ.

ಉದಾ: $2/3 = \{(2, 3), (4, 6), (8, 12), (-6, -9) \ldots\}$ ಗಣ.

ಭಾಗ ಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣವನ್ನು Q ಎಂದು ಕರೆಯುವೆವು.

2.21. **ಸಂಕಲನ, ಗುಣಾಕಾರ.** ಎರಡು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ a/b, c/d ಗಳ ಸಂಕಲನ ಗುಣಾಕಾರ ಕ್ರಿಯೆಗಳನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ನಿಯಮಗಳಿಂದ ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸುವೆವು.

$$a/b \text{ ಸಂ } c/d = \{ (a. d) + (b. c) \} / (b. d)$$

$$a/b \text{ ಗು } c/d = (a. c) / (b. d)$$

b, d ಯಾವುದೂ ಸೊನ್ನೆಯಲ್ಲದಿದ್ದರೆ, $b. d$ ಸಹ ಸೊನ್ನೆಯಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ ಮೇಲಣ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು Q ಗಣಕ್ಕೆ ಸೇರಿವೆ. ವ್ಯಾಖ್ಯೆಗೆ ಸಮರ್ಥನೆ ನೀಡಲು a/b ಗೆ ಬದಲು a'/b'. $(a. b) \approx (a'. b')$ ಮತ್ತು c/d ಗೆ ಬದಲು c'/d', $(c, d) \approx (c'. d')$ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವುದರಿಂದ, ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯು ಅದೇ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನೇ ಕೊಡುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಬೇಕು.

ಈಗ $a. b' = a'. b$ ಮತ್ತು $c. d' = c'. d$

$\therefore (a. b'). d.d' = (a'. b). d.d'$

ಮತ್ತು $(c.d'). b.b' = (c'. d). b.b'$

ಅಥವಾ $(a.d) . (b'.d') = (a'.d') . (b.d)$

ಮತ್ತು $(b.c) . (b'.d') = (b'.c') . (b.d)$

ಕೂಡುವುದರಿಂದ $(a.d + b.c) . (b'.d') = (a'.d' + b'.c) . (b.d')$

ಆದ್ದರಿಂದ, $(a . d + b . c) / (b . d) = (a'. d' + b' . c') / (b'.d')$

ಹೀಗೆಯೇ ಗುಣಾಕಾರಕ್ಕೆ.

$$(a.b').(c.d') = (a'.b).(c'.d)$$

$$\therefore\ (a.c).(b'.d') = (a'.c').(b.d)$$

$$\therefore\ a.c \,|\, b.d = a'.c' \,|\, b'.d'$$

2.22 Properties

Theorem 31. Rational numbers possess the following properties :

(i) Associatiative and commutative laws hold good for addition and for multiplication.

(ii) Q contains the number 0/1 as the identity element of addition, and the number 1/1 as the identity element of multiplication.

(iii) Every element of Q has additive inverse.

(iv) With the exception of the element 0/1, every element of Q has multiplicative inverse.

(v) The distributive law of multiplication holds.

Proof :

(i) We shall prove just one, by way of illustration. Let us prove the associative law of multiplication. If a/b, c/d, e/f are three rational numbers, we are to prove that

$$(a/b \text{ mul } c/d) \text{ mul } e/f = a_{,}b \text{ mul } (c/d \text{ mul } e/f).$$

$$\text{The left side} = (a{\cdot}c \,|\, b.d) \text{ mul } e/f$$

$$= \frac{(a.c).\,e}{(b.d).\,f}$$

Now a, b, c, d etc. are elements of J (integers). Since the associative law for multiplication holds in J, the above becomes

$$\frac{a.\,(c.e)}{b.\,(d.f)} = a/b \text{ mul } (c/d \text{ mul } e/f)$$

$$(a\,.\,b')\,.\,(c\,.\,d') = (a'.\,b)\,.\,(c'.\,d)$$

$$\therefore \quad (a\,.\,c)\,.\,(b', d') = (a'\,.\,c')\,.\,(b\,.\,d)$$

$$\therefore \quad a\,.\,c\,/\,b\,.\,d = a'\,.\,c'\,/\,b'.\,d'$$

2.22 ಗುಣಗಳು.

ಪ್ರಮೇಯ 31. **ಭಾಗಲಬ್ಧಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಕೆಳಗಿನ ಗುಣಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ.**

i) **ಸಂಕಲನ ಗುಣಾಕಾರ ಕ್ರಿಯೆಗಳಿಗೆ ಸಹವರ್ತನ ಗುಣಗಳೂ ಪರಿವರ್ತನ ಗುಣಗಳೂ ಇವೆ.**

ii) **ಸಂಕಲನದ "ಏಕ"ವಾಗಿ 0/1 ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯೂ, ಗುಣಾಕಾರದ "ಏಕ"ವಾಗಿ 1/1 ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯೂ Q ನಲ್ಲಿ ಸೇರಿವೆ.**

iii) **Q ನ ಪ್ರತಿ ಗಣಾಂಶಕ್ಕೂ ಸಂಕಲನದ ಪ್ರತಿಲೋಮಾಂಶವು ಬಂದಿದೆ.**

iv) **0/1 ಎಂಬ ಅಂಶವನ್ನು ಬಿಟ್ಟು, Q ನ ಪ್ರತಿ ಗಣಾಂಶಕ್ಕೂ ಗುಣಾಕಾರದ ಪ್ರತಿಲೋಮಾಂಶವು ಬಂದಿದೆ.**

v) **ಗುಣಾಕಾರದ ವಿಭಾಜಕ ನಿಯಮವು ಇದೆ.**

ಸಾಧನೆ. i) ಮಾದರಿಗಾಗಿ ಒಂದನ್ನು ಮಾತ್ರ ತೋರಿಸುವೆವು. ಗುಣಾಕಾರದ ಸಹವರ್ತನೆಯನ್ನು ಸಾಧಿಸುವ. ಎಂದರೆ a/b, c/d, e/f ಮೂರು ಭಾಗಲಬ್ಧಸ ಂಖ್ಯೆಗಳಾದರೆ,

$$(a/b \text{ ಗು } c/d) \text{ ಗು } e/f = a/b \text{ ಗು } (c/d \text{ ಗು } e/f).$$

ಈಗ, ಎಡಗಡೆಯು $= (a.c\,/\,b.d)$ ಗು (e/f)

$$= \frac{(a.c).e}{(b\,.\,d)\cdot f}$$

a, b, c, d ಮುಂತಾದುವು J ಯ ಅಂಶಗಳು. (ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು) J ನಲ್ಲಿ ಗುಣಾಕಾರಕ್ಕೆ ಸಹವರ್ತನೆ ಇರುವುದರಿಂದ,

ಮೇಲಿನದು $a\,.\,(c\cdot e)\,/\,b.\,(d\,.\,f)$ ಆಗುತ್ತದೆ,

$$= a/b \text{ ಗು } (c/d \text{ ಗು } e/f)$$

The other properties are easily proved in a similar manner.

(ii) The identity element of addition is 0/1, for

$$a/b \text{ ad } 0/1 = (a.\,1+b\,0)\big/_{b.1} = a/b.$$

Similarly a/b mul $1/1 = a/b$.

(iii) The additive inverse. If x ad $y = 0/1$, then y is the additive inverse of x.

It is easily seen that the inverse of a/b is $(-a)/b$,

for a/b ad $-a/b = \{a.b+(b,-a)\}\big/_{b.b}$

$$= \{(a.b)-(a.b)\}\big/_{b.b} = 0/b.b \approx 0/1$$

(iv) Similarly, the multiplicative inverse of a/b is b/a.

For a/b mul $b/a = (a.b)\big/_{(b.a)} = (a.b)\big/_{(a.b)} \approx 1/1.$

(v) The proof of this is left to the student.

2 23. By taking $b = 1$, we get a subset of Q, viz.

$$\text{I} = \{\, a/1 \,;\, a \in J \,\}$$

The sum and the product of any two elements of this subset belong to this subset. For

$$a/1 \text{ ad } c/1 = (a+c)/1$$
$$a/1 \text{ mul } c/1 = (a.c)/1$$

Let us call the elements of the subset I as the *rational integers*.

Theorem 32. *The set* I *of the rational integers is isomorphic with the set J of integers.*

Proof. The operations "ad" and "mul" on I may be made to correspond to + and . The element $a/1$ of I may be made to correspond to the element a of J. Thus a (1, 1) correspondence is set up between the elements of I, the operations ad and mul with the elements of J, and the operations + and . Also

ಹೀಗೆಯೇ ಇತರ ಗುಣಗಳನ್ನು ಸುಲಭವಾಗಿ ಪಡೆಯಬಹುದು.

ii) ಸಂಕಲನದ ಏಕ $0/1$,

ಎಂದರೆ a/b ಸಂ $0/1 = (a \cdot 1 + b \cdot 0)/ b \cdot 1$

$$= a/b.$$

ಹೀಗೆಯೇ a/b ಗುಣ $1/1 = a/b$.

iii) ಸಂಕಲನದ ಪ್ರತಿ ಲೋಮ. x ಸಂಖ್ಯೆಗೆ x ಸಂ. $y = 0/1$ ಆದರೆ, y ಎಂಬುದು x ನ ಪ್ರತಿ ಲೋಮ.

a/b ಯ ಪ್ರತಿ ಲೋಮ $(-a)/b$ ಎಂದು ಸುಲಭವಾಗಿ ತಿಳಿಯಬಹುದು.
a/b ಸಂ. $-a/b = \{a \cdot b + b\,(b \cdot -a)\}/\, b \cdot b$

$$= \{(a \cdot b) - (a \cdot b)\}/\, b \cdot b = 0/b \cdot b \approx 0/1.$$

iv) ಹೀಗೆಯೇ a/b ಗೆ ಗುಣಾಕಾರದ ಪ್ರತಿ ಲೋಮವು b/a.

a/b ಗು $b/a = (a \cdot b)/(b \cdot a) = (a \cdot b)/(a \cdot b) \approx 1/1.$

v) ರ ಸಾಧನೆಯನ್ನು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗೆ ಬಿಡಲಾಗಿದೆ.

2.23 ಈಗ $b = 1$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, Q ನ ಒಂದು ಉಪಗಣ,

$I = \{a/1 : a \in J\}$

ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ಈ ಉಪಗಣದ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಗಣಾಂಶಗಳೂ ಮೊತ್ತವೂ ಗುಣಲಬ್ಧವೂ ಉಪಗಣದಲ್ಲಿಯೇ ಇರುವುದು. ಹೇಗೆಂದರೆ,

$a/1$ ಸಂ. $c/1 = (a+c)/1$

$a/1$ ಗು $c/1 = (a \cdot c/1)$.

I ಉಪಗಣದ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು ಎಂದು ಕರೆಯೋಣ.

ಪ್ರಮೇಯ 32 ಭಾಗಲಬ್ಧ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗಣವು (I) ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಗಣ J ಒಡನೆ ಸಮಾನುಕ್ರಮಣವನ್ನು ಪಡೆದಿರುವುದು.

ಸಾಧನೆ. I ಮೇಲಿನ "ಸಂ", "ಗು" ಪರಿಕರ್ಮಗಳನ್ನು $+$, $\bullet$ ಒಡನೆ ಸರಿಹೊಂದಿಸಬಹುದು. $a/1$ ಎಂಬ I ಯ ಗಣಾಂಶವನ್ನು J ಯಲ್ಲಿರುವ a ಗಣಾಂಶದೊಡನೆ ಸರಿಹೊಂದಿಸಬಹುದು. ಹೀಗೆ I ಯ ಗಣಾಂಶಗಳಿಗೂ, ಸಂ. ಗು ಪರಿಕರ್ಮಗಳಿಗೂ J ಯ ಗಣಾಂಶಗಳಿಗೂ, $+$, $\bullet$ ಪರಿಕರ್ಮಗಳಿಗೂ (1, 1) ಹೊಂದಾಣಿಕೆ ಏರ್ಪಡುತ್ತದೆ. ಮತ್ತು,

$$a/1 \text{ ad } b/1 = (a+b)/1 \longleftrightarrow a+b$$

$$a/1 \text{ mul } b/1 = (a.b)/1 \longleftrightarrow a.b.$$

The proof is thus complete.

As a consequence of this Theorem, the rational integers may be considered as identical with integers. Hence, hereafter we shall simply write 4 instead of 4/1, and —6 instead of —6/1. We shall use the symbols + and · instead of ad and mul.

2.24. The inverse operation of addition will be called subtraction, and the inverse operation of multiplication will be called division. We shall also write $-(a/b)$ for $(-a)/b$.

Rule for Subtraction. $(a/b)-(c/d)=a/b+(-c/d)$

Rule for division. $(a/b)\div(c/d)=(a/b)\,.\,(d/c)\ /\ /(b,\ c,\ d\neq 0).$

Since $(a/1)\div b/1)=(a/1)\,.\,(1/b)=(a.1)/(b.1)=a/b,$

the rational number a/b is the ratio of two integers.

2.25. Rational numbers will now be classified into positive and negative numbers.

Definition. *If* $a.b>0$, then a/b *is a positive number*

If $a.b<0$, then a/b *is a negative number.*

If $a.b=0$ then $a/b=0$

(That $b\neq 0$ is included in the definition of a/b)

Since we have agreed (2.23) to write a instead of $a/1$, $a/1$ is positive, negative or zero according as a is positive, negative or zero. Since $b\neq 0$, $a.b=0$ implies $a=0$.

To justify the definition, we must prove that when $(a,b)\approx(c.d)$ *i.e.* when $a/b=c/d$, $c.d$ and $a.b$ are both positive or both negative, or both zero.

$$a/1 \text{ ಸಂ } b/1 = (a+b)/1 \leftarrow\rightarrow (a+b)$$

$$a/1 \text{ ಗು } b/1 = (a \cdot b)/1 \leftarrow\rightarrow a \cdot b$$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಸಾಧನೆಯು ಪೂರ್ತಿಯಾಯಿತು.

ಈ ಪ್ರಮೇಯದ ಫಲವಾಗಿ, ಭಾಗಲಬ್ಧಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳೂ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳೂ ಒಂದೇ ಎಂದು ಭಾವಿಸಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ, ಇನ್ನು ಮುಂದೆ $4/1$ ಗೆ ಬದಲು 4, $-6/1$ ಗೆ ಬದಲು -6 ಎಂದೇ ಬರೆಯುವೆವು, ಸಂ, ಗು ಚಿಹ್ನೆಗಳಿಗೆ ಬದಲು $+$, $\cdot$ ಚಿಹ್ನೆಗಳನ್ನೇ ಬಳಸುವೆವು.

2.24 ಸಂಕಲನ ಪ್ರತಿಲೋಮ ಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು ವ್ಯವಕಲನ ಎಂದೂ, ಗುಣಾಕಾರದ ಪ್ರತಿಲೋಮ ಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು ಭಾಗಹಾರ ಎಂದೂ ಕರೆಯುವೆವು. $(-a)/b$ ಎಂಬುದನ್ನು $-(a/b)$ ಎಂದು ಬರೆಯುವೆವು.

ವ್ಯವಕಲನ ನಿಯಮ $(a/b) - (c/d) = a/b + (-c/d)$

ಭಾಗಹಾರ ನಿಯಮ $(a/b) \div (c/d) = (a/b) \cdot (d/c)$, $(b, c, d \neq 0)$

$(a/1) \div b/1 = (a/1) \cdot (1/b) = (a \cdot 1)/(b \cdot 1) = a/b$ ಆದ್ದರಿಂದ, ಭಾಗಲಬ್ಧಸಂಖ್ಯೆ a/b ಎಂಬುದು ಎರಡು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ನಿಷ್ಪತ್ತಿ ಆಗುತ್ತದೆ.

2.25 ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಈಗ ಋಣ ಧನಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿ ವಿಂಗಡಿಸುವೆವು.

ವ್ಯಾಖ್ಯೆ. $a \cdot b > 0$ **ಆದಾಗ,** a/b **ಧನಸಂಖ್ಯೆ**

$a \cdot b < 0$ **ಆದಾಗ,** a/b **ಋಣಸಂಖ್ಯೆ**

$a \cdot b = 0$ **ಆದಾಗ,** $a/b = 0$

($b \neq 0$ ಎಂದು a/b ಯ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯಲ್ಲೇ ಅಡಕವಾಗಿದೆ)

$a/1$ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು a ಎಂದೇ ಬರೆಯಲು ಒಪ್ಪಿರುವುದರಿಂದ (§ 2.23) a ಧನ, ಋಣ, ಸೊನ್ನೆ ಆದಂತೆ $a/1$ ಸಹ ಆಗುತ್ತದೆ. $b \neq 0$ ಆದ್ದರಿಂದ, $a \cdot b = 0$ ಆದರೆ $a = 0$.

ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸಮರ್ಥನೆಮಾಡಲು, $(a, b) \approx (c, d)$ ಆದಾಗ, ಎಂದರೆ $a/b = c/d$ ಆದಾಗ, $c \cdot d$, $a \cdot b$ ಎರಡೂ ಧನ ಅಥವಾ ಎರಡೂ ಋಣ, ಅಥವಾ ಸೊನ್ನೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಬೇಕು.

Now $(a,b) \approx (c,d)$ or $a.d = b.c$.

$\therefore \quad (a.d).(a.d) = (b.c).(a.d)$

$\therefore \quad (a.a).(d.d) = (a.b).(c.d)$

Now $a.a$ and $d.d$ are both positive (Theorem 29)

$\therefore \quad (a.b).(c.d)$ is positive

$\therefore \quad (a.b)$ and $(c.d)$ are both positive or both negative.

Theorem 29 can be extended to rational numbers. For example, let a/b be positive and c/d negative.

$\therefore \quad a.b > 0, \qquad c.d < 0$

Now $(a/b) \cdot (c/d) = (a.c)/(b.d)$

Now $(a.b) \cdot (c.d) = (a.c) \cdot (b.d)$ by commutativity

But $(a.b) \cdot (c.d)$ is negative

$\therefore \quad (a.c) \cdot (b.d)$ is negative

$\therefore$ By definition $(a.c)/(b.d)$ is negative

$\therefore \quad (a/b) \cdot (c/d)$ is negative

The other cases can be proved similarly.

2.26. **Order.** Definition. *If a positive number e/f exists so as to make $a/b = c/d + e/f$, then the number a/b is greater than c/d.* We write this as $a/b > c/d$.

Since subtraction has been introduced as an operation,

$e/f = a/b - c/d$

Transitivity. Let $a/b > c/d$ and $c/d > e/f$.

$\therefore \quad a/b = c/d + g/h$ and $c/d = e/f + m/n$,

where g/h and m/n are both positive

ಈಗ $(a \cdot b) \approx (c, d)$ ಅಥವಾ $a \cdot d = b \cdot c$.

$\therefore \quad (a \cdot d) \cdot (a \cdot d) = (b \cdot c) \cdot (a \cdot d)$

$\therefore \quad (a \cdot a) \cdot (d \cdot d) = (a \cdot b) \cdot (c \cdot d)$

$a \cdot a$ ಮತ್ತು $d \cdot d$ ಎರಡೂ ಧನ (ಪ್ರಮೇಯ 29)

$\therefore \quad (a \cdot b) \cdot (c \cdot d)$ ಧನ.

$\therefore \quad (a \cdot b), (c \cdot d)$ ಎರಡೂ ಧನ, ಇಲ್ಲವೇ ಎರಡೂ ಋಣ.

ಪ್ರಮೇಯ 29 ನ್ನು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ವಿಸ್ತರಿಸಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ, a/b ಧನ, c/d ಋಣ ಆಗಿರಲಿ.

$\therefore \quad a \cdot b > 0, c \cdot d < 0.$

ಈಗ $(a/b) \cdot (c/d) = (a \cdot c) / (b \cdot d)$

ಈಗ $(a \cdot b) \cdot (c \cdot d) = (a \cdot c) \cdot (b \cdot d)$ ಪರಿವರ್ತನೆಯಿಂದ.

ಆದರೆ $(a \cdot b) \cdot (c \cdot d) =$ ಋಣ.

$\therefore \quad (a \cdot c) \cdot (b \cdot d) =$ ಋಣ

$\therefore$ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯಂತೆ $(a \cdot c) / (b \cdot d)$ ಋಣ

$\therefore \quad (a/b) \cdot (c/d) =$ ಋಣ.

ಹೀಗೆಯೇ ಉಳಿದ ಸಂದರ್ಭಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಬಹುದು.

2 26 **ಕ್ರಮ.**

ವ್ಯಾಖ್ಯೆ. $a/b = c/d + e/f$ ಆಗಿರುವಂತೆ e/f ಧನಸಂಖ್ಯೆ ಇದ್ದರೆ, a/b ಸಂಖ್ಯೆಯು c/d ಗಿಂತ ದೊಡ್ಡದು. ಇದನ್ನು $a/b > c/d$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ವ್ಯವಕಲನವನ್ನು ಒಂದು ಪರಿಕರ್ಮವನ್ನಾಗಿ ತಂದಿರುವುದರಿಂದ, $e/f = a/b - c/d$.

ಸಾಹಚರ್ಯಗುಣ. $a/b > e/d$ ಮತ್ತು $c/d > e/f$ ಆಗಿರಲಿ.

$\therefore \quad a/b = c/d + g/h$ ಮತ್ತು $c/d = e/f + m/n$,

ಇಲ್ಲಿ g/h, m/n ಎರಡೂ ಧನಸಂಖ್ಯೆಗಳು.

$\therefore \quad a/b = e/f + (g/h + m/n)$

We have to prove that

$$g/h + m/n = (g.n + h.m)/h.n \quad \text{is positive}$$

Now $q = (h.n)(g.n + h.m) = (h.g)\cdot(n.n) + (h.h)\cdot(m.n)$.

Now according to the definition in 2.25, $h.g$ and $m.n$ are both positive.

$\therefore \quad q$ is positive

$\therefore \quad g/h + m/n$ is positive

We can now show that rational numbers possess trichotomy.

Exercises 2.3

1 Prove that the identity elements of addition and of multiplication are unique.

2 If $(a/b)\cdot(c/d) = 1$ and $(e/f)\cdot(a/b) = 1$, prove that $c/d = e/f$.
[Hint: Apply the associative law of multiplication for $e/f \cdot a/b \cdot c/d$.]

Hence, the multiplicative inverse of a given rational number ($\neq 0$) is unique. Ex. If $a \neq 0$, the inverse of a/b is b/a.

3 If r, s are rational numbers and $r \neq 0$, the rational number x which makes $r.x = s$ is unique.

4 If x, y are rational numbers, prove that

(i) $-(x+y) = (-x) + (-y)$

(ii) $-(-x) = x$

(iii) the multiplicative inverse (or reciprocal) of $x \cdot y$ = (reciprocal of x) $\cdot$ (reciprocal of y), $x \neq 0$, $y \neq 0$.

(iv) the reciprocal of the reciprocal of $x = x$, ($x \neq 0$.)

If $a/b > c/d$ and if $m/n > 0$, prove that $(a/b)\cdot(m/n) > (c/d)\cdot(m/n)$.

6 If α and β are two rational numbers, and if $\alpha > \beta$, prove that $\alpha > \frac{1}{2}\cdot(\alpha+\beta) > \beta$.

$\therefore \quad a/b = e/f + (g/h + m/n)$

$g/h+m/n=(g\cdot n+h\cdot m \,/\, h\cdot n$ ಧನಸಂಖ್ಯೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಬೇಕು.

ಈಗ, $q=(h\cdot n)=(g.n+h.m)=(h.g)\cdot(n.n)+(h.h).(m.n)$

ಈಗ, $h.g$ ಮತ್ತು $m.n$ ಎರಡೂ ಧನ § 2.25 ರ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯಂತೆ

$\therefore \quad q$ ಧನ.

$\therefore \quad g/h+m/n$ ಧನ

ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ತ್ರಿಚ್ಛೇಧ್ಯತೆ ಇರುತ್ತದೆಂದು ಈಗ ಸಾಧಿಸಬಹುದು.

ಅಭ್ಯಾಸ 2.3

1. ಸಂಕಲನದ ಏಕವೂ, ಗುಣಾಕಾರದ ಏಕವೂ ಏಕೈಕವಾಗಿವೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ

2. $(a/b).(c/d)=1$ ಮತ್ತು $(e/f).(a/b)=1$ ಆದರೆ $c/d=e/f$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ. [ಸೂಚನೆ. $(e/f)\cdot(a/b)\cdot(c/d)$ಗೆ ಗುಣಾಕಾರದ ಸಹವರ್ತನನಿಯಮವನ್ನು ಪ್ರಯೋಗಿಸಿ.]

   ಆದುದರಿಂದ, ಒಂದಕ್ಕೊದತ್ತ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ$(\neq 0)$ಗೆ ಗುಣಾಕಾರದ ಪ್ರತಿಲೋಮವು ಏಕೈಕ. ಉದಾ, $a\neq 0$ ಆದರೆ, a/b ಯ ಪ್ರತಿಲೋಮ b/a

3. r,s ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿದ್ದು, $r\neq 0$ ಆದರೆ $r.x=s$ ಆಗಿರುವಂತೆ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ x ಏಕೈಕವಾಗಿರುವುದು.

4. x,y ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದರೆ,

   (i) $-(x+y)=(-x)+(-y)$

   (ii) $-(-x)=x$

   (iii) $(x.y)$ ಯ ಗುಣಾಕಾರದ ಪ್ರತಿಲೋಮ (ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮ), $=(x$ ನ ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮ$)\cdot(y$ ನ ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮ$)$. [ಇಲ್ಲಿ $x\neq 0$, $y\neq 0$]

   (iv) x ನ ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮದ ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮ $=x$, $[x\neq 0]$. ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

5. $a/b>c/d$ ಮತ್ತು $m/n>0$ ಆದರೆ, $(a/b)\cdot(m/n)>(c/d).(m/n)$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

6. α ಮತ್ತು β ಎರಡು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದರೆ, ಮತ್ತು $\alpha>\beta$ ಆದರೆ $\alpha>\frac{1}{2}\cdot(\alpha+\beta)>\beta$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

[Between two rational numbers α and β, we can thus obtain another rational number (call it γ). Similarly between (α, γ) and (β, γ) there are other rational numbers. This sequence can be extended indefinitely. Hence

Between two rational numbers, there exist other rational numbers which form an infinite set. This property is called density. *The set of rational numbers is a dense set.*]

[ಹೀಗೆ ಎರಡು ಭಾಗ ಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ α, βಗಳ ನಡುವೆ ಮತ್ತೊಂದು ಭಾಗ ಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು (γ ಎನ್ನಿ) ಪಡೆಯಬಹುದು. ಇದರಂತೆಯೇ (α, γ)ಗಳ ನಡುವೆ, (β, γ)ಗಳ ನಡುವೆ ಬೇರೆ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿವೆ. ಈ ಸರಣಿಯನ್ನು ಅನಂತವಾಗಿ ಬೆಳೆಸಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ,

ಎರಡು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ನಡುವೆ ಅನಂತಗಣವಾಗಿರುವ ಇತರ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಇರುತ್ತವೆ. ಈ ಗುಣವನ್ನು ಸಾಂದ್ರತೆ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. **ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯಾಗಣವು ಸಾಂದ್ರತೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ.**]

Part 4. Real Numbers

2.27. An account of the rational numbers has been given above. We have also explained that in terms of isomorphism, integers are included in rational numbers, and that natural numbers are included in integers.

The student's attention has been drawn previously to the conclusion that these number systems are not sufficient for our needs. If the sides of a right angled triangle are of unit length each, the length of its hypotenuse has been indicated by the symbol $\sqrt{2}$, and it has been shown in § 2.5 of *Pre - University Mathematics*, Part I that this number cannot be expressed in the form a/b of a rational number. Hence we say that $\sqrt{2}$ is not a rational number. We call it as an irrational number.

Similarly $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{7}$, and so on are irrational numbers. Besides these, there are complicated irrational numbers like π, e, $\sqrt{\pi}$, e^2, log 2 and so on.

All these numbers, including irrational numbers and the different cases of rational numbers will be called as *real numbers*. A logical definition for these will be set forth.

2.28. Every one is familiar with the method, based on geometry, in which all numbers are mapped (or "plotted") on a straight line. The straight line is an undefinable geometrical concept. We have accepted as axioms in geometry that one and only one straight line passes through two points, and that an infinite number of points lie on the line. On such a straight line, choose an origin O, and mark to its right on the line $OA = AB = BC = \ldots\ldots$ The points O, A, B, C, ...then represent

ಭಾಗ 4 ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು.

2.27 ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಪರಿಚಯವನ್ನು ಮಾಡಿಕೊಡಲಾಯಿತು. ಸಮಾನುಕ್ರಮಣದ ದೃಷ್ಟಿಯಿಂದ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಅಡಕವಾಗಿವೆ ಎಂದೂ, ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಲ್ಲಿ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಅಡಕವಾಗಿವೆ ಎಂದೂ ವಿವರಿಸಿದ್ದೇವೆ.

ನಮ್ಮ ಉಪಯೋಗಕ್ಕೆ ಈ ಸಂಖ್ಯಾವರ್ಗಗಳೇ ಸಾಲವು ಎಂಬ ತೀರ್ಮಾನದ ಕಡೆಗೆ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯ ಗಮನವನ್ನು ಹಿಂದೆಯೇ ಸೆಳೆಯಲಾಗಿದೆ. ಒಂದು ಸಮಕೋನ ತ್ರಿಭುಜದ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳೂ ಒಂದು ಮಾನವುಳ್ಳದಾಗಿದ್ದರೆ, ಅದರ ಕರ್ಣದ ಅಳತೆಯನ್ನು $\sqrt{2}$ ಎಂಬ ಚಿಹ್ನೆಯಿಂದ ತೋರಿಸಿ, ಇದನ್ನು a/b ಎಂಬ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಪಡೆಯಲು ಆಗುವುದಿಲ್ಲ ಎಂಬುದನ್ನು ಪ್ರಿಯೂನಿವರ್ಸಿಟಿ ಗಣಿತ ಭಾಗ 1 § 2.5ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ $\sqrt{2}$ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲ ಎಂದು ಹೇಳುವೆವು ಇದನ್ನು ಅಭಾಗಲಬ್ಧಸಂಖ್ಯೆ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಹೀಗೆಯೇ $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt[3]{7}$, ಇತ್ಯಾದಿಗಳು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು. ಇವಲ್ಲದೆ π, e, $\sqrt{\pi}$, e^2, $\log 2$, ಮುಂತಾದ ಜಟಿಲವಾದ ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೂ ಇವೆ.

ಈ ಎಲ್ಲ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನೂ, ಎಂದರೆ ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನೂ ಭಾಗಲಬ್ಧಸಂಖ್ಯೆಗಳ ನಾನಾ ಸಂದರ್ಭಗಳನ್ನೂ ಒಟ್ಟುಗೂಡಿಸಿ. ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೆಂಬ ಹೆಸರಿಟ್ಟು, ಅವುಗಳ ತರ್ಕಯುತವಾದ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯನ್ನು ಈಗ ಮುಂದಿಡುತ್ತೇವೆ.

2.28. ರೇಖಾಗಣಿತದ ವಿಧಿಯನ್ನು ಅನುಸರಿಸಿ, ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನೆಲ್ಲಾ ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಚಿತ್ರಿಸುವ ("ಗುರ್ತಿಸುವ") ವಿಧಾನವು ಎಲ್ಲರಿಗೂ ಪರಿಚಿತವಾಗಿಯೇ ಇದೆ. ಸರಳರೇಖೆ ಎಂಬುದು ರೇಖಾ ಗಣಿತದಲ್ಲಿ ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಲಾಗದ ಒಂದು ಮೂಲ ಭಾವನೆ. ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಒಂದು, ಒಂದೇ ಒಂದು ಸರಳ ರೇಖೆ ಹೋಗುವುದೆಂಬುದನ್ನೂ ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಬಿಂದುಗಳು ಅನಂತವಾಗಿರುವುವೆಂಬುದನ್ನೂ ಸ್ವತಸ್ಸಿದ್ಧ ಪ್ರಮಾಣಗಳನ್ನಾಗಿ ರೇಖಾಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಅಂಗೀಕರಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಇಂಥ ಒಂದು ಸರಳ ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಒಂದು ಮೂಲ ಬಿಂದು O ನ್ನು ಆರಿಸಿ, ರೇಖೆಯಮೇಲೆ ಅದರ ಬಲಕ್ಕೆ OA = AB = BC = ... ಇರುವ ಹಾಗೆ A,B,C, ... ಗಳನ್ನು ಗುರ್ತಿಸಿದರೆ, O,A,B,C, ... ಬಿಂದುಗಳು

in order the numbers 0, 1, 2, 3, ... Similarly, if to the left also, we mark $AO=OA'=A'B'=B'C'=\ldots$, then the points $A,'B,'C',\ldots\ldots$ represent the numbers $-1,-2,-3,-\cdots$. In this way, all the integers are plotted on a straight line.

The method of dividing a given segment of a straight line into q equal parts (q is a positive integer) is explained in geometry. In this way, the $1/q$th part of the segment OA can be obtained. A length equal to p times (p is an integer) this length can be marked on the straight line either to the right or to the left of O. In this way, any rational number p/q can be represented on the line.

Some irrational numbers too can be easily plotted. Draw a square of side equal to unit length, and mark on the straight line OR to the right of O equal to the length of the diagonal of the square. Then the point R denotes the number $\sqrt{2}$. Similarly, we can plot the numbers $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, etc.

The straight line that we have used is called the ***number line*** (or linear continuum). Plotting numbers on the number line gives us a vivid picture of them, and helps us to understand their properties. Students of analytical geometry are quite familiar with this. But it must be understood that this geometrical method while it is useful to us is not actually necessary. It is possible to understand subsequent developments without its help.

2 29. As an introduction to the definition of a real number, let us consider the number $\sqrt{2}$. The meaning of $\sqrt{2}$ is that its square is equal to 2. There is some number such that its square is equal to 2. By arithmetic, we have

ಕ್ರಮವಾಗಿ 0, 1, 2, 3, ... ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಚಿತ್ರಿಸುತ್ತವೆ. ಹೀಗೆಯೇ O ಬಿಂದುವಿನ ಎಡಕ್ಕೂ A O=OA′=A′B′=B′C′=.... ಆಗುವ ಹಾಗೆ A′, B′, C′, .. ಪಡೆದರೆ, ಈ ಬಿಂದುಗಳು −1, −2, −3, .. ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಚಿತ್ರಿಸುತ್ತವೆ. ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನೆಲ್ಲಾ ಒಂದು ಸರಳ ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಚಿತ್ರಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ.

ದತ್ತ ಸರಳರೇಖಾಖಂಡವೊಂದನ್ನು q (ಇದು ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕ) ಸಮಭಾಗಗಳನ್ನಾಗಿ ಮಾಡುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ರೇಖಾಗಣಿತದಲ್ಲಿ ತಿಳಿಯಬಹುದು. ಹೀಗೆ OA ರೇಖೆಯ $1/q$ ಭಾಗವನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು. ಈ ಭಾಗದ ಅಳತೆಗೆ p ನಷ್ಟು (p ಪೂರ್ಣಾಂಕ) ಉದ್ದವನ್ನು ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ O ಬಿಂದುವಿನ ಬಲಕ್ಕಾಗಲಿ ಎಡಕ್ಕಾಗಲಿ ಗುರ್ತಿಸಬಹುದು. ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ p/q ನ್ನು ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಚಿತ್ರಿಸಬಹುದು.

ಕೆಲವು ಅಭಾಗಲಬ್ಧಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನೂ ಸುಲಭವಾಗಿ ಗುರ್ತಿಸಬಹುದು. ಒಂದು ಮಾನವಿರುವ ಚಚ್ಚೌಕದ ಕರ್ಣದ ಅಳತೆಗೆ ಸರಳ ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ O ಬಿಂದುವಿನ ಬಲಕ್ಕೆ O R ಗುರ್ತಿಸಿದರೆ, R ಬಿಂದುವು $\sqrt{2}$ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಚಿತ್ರಿಸುತ್ತದೆ. ಹೀಗೆಯೇ $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, ... ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಚಿತ್ರಿಸಬಹುದು.

ನಾವು ಉಪಯೋಗಿಸಿರುವ ರೇಖೆಯನ್ನು **ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆ** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಚಿತ್ರಿಸುವುದು ಅವುಗಳನ್ನು ಕಣ್ಣಿಗೆ ಕಟ್ಟಿದಂತಾಗುತ್ತದೆ, ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಗುಣಗಳನ್ನು ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳಲು ಸಹಾಯಕವಾಗುತ್ತದೆ. ಬೀಜರೇಖಾಗಣಿತದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಇದನ್ನು ಚೆನ್ನಾಗಿ ಅರಿತಿರುವರು. ಆದರೆ ರೇಖಾಗಣಿತೀಯವಾದ ಈ ವಿಧಾನವು ನಮಗೆ ಸಹಕಾರಿ ಎಂದು ಇದನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವೆವೇ ಹೊರತು, ಇದು ಅಗತ್ಯ ಎಂದು ತಿಳಿಯಬೇಕಾದುದಿಲ್ಲ. ಮುಂದಿನ ವಿಷಯಗಳನ್ನು ಇದರ ಸಹಾಯವಿಲ್ಲದೆಯೇ ಅರಿತುಕೊಳ್ಳಲು ಸಾಧ್ಯ.

2.29 ವಾಸ್ತವಸಂಖ್ಯೆಯ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಗೆ ಪೀಠಿಕೆಯಾಗಿ, $\sqrt{2}$ ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನೇ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. $\sqrt{2}$ ಎಂಬುದರ ಅರ್ಥ, ಅದರ ವರ್ಗ 2. ಯಾವುದೋ ಸಂಖ್ಯೆ, ಅದರವರ್ಗ 2 ಆಗುವಂತೆ, ಇದೆ. ಅಂಕಗಣಿತದ ವಿಧಾನಗಳಿಂದ,

$1.4^2 = 1.96$	$1.5^2 = 2.25$
$1.41^2 = 1.9881$	$1.42^2 = 2.0164$
$1.414^2 = 1.999396$	$1.415^2 = 2.002225$
$1.4142^2 = 1.99996164$	$1.4143^2 = 2.00024449$
....	....

The squares of the numbers 1.4, 1.41, 1.414,...are less than 2 and approach it closer and closer. Similarly the squares of the numbers: 1.5, 1.42, 1.415, . are greater than 2, and approach it closer and closer. The numbers 1.4, 1.41, 1.5, 1.42, and so on are all rational numbers, and hence they can all be marked on our number line (this may involve some labour, but we are not concerned with it here, they can be somehow plotted). We have accepted that the *number* $\sqrt{2}$ *exists*. Hence, the point representing it is to the right of the points 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142,.. and to the left of the points 1.5, 1.42, 1.415, 1.4143,...... So this point cuts the line into two parts giving the points 1.4, 1.41 etc. on one side, and the points 1.5, 1.42, etc, on the other side.

Extending the principle underlying this example, Dedekind (1831-1916), a German mathematician initiated the notion of a real number in 1872

2.30 Dedekind Section.

Definition. *Let A and B be two non-empty sub-sets of the set Q of rational numbers, possessing the following properties:*

(i) $A \cup B = Q$

(ii) *If* $a \in A$, $b \in B$, *then* $a \leqslant b$.

(iii) *The set* $A \cap B$ *has at most one element.*

We then say that the sub-sets A and B form a Dedekind cut (or section). This section is also called a real number.

$1.4^2 = 1.96$	$1.5^2 = 2.25$
$1.41^2 = 1.9881$	$1.42^2 = 2.0164$
$1.414^2 = 1.999396$	$1.415^2 = 2.002225$
$1.4142^2 = 1.99996164$	$1.4143^2 = 2.00024449$
....	....

ದೊರೆಯುತ್ತವೆ. 1.4, 1.41, 1.414, ... ಮುಂತಾದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗಗಳು 2ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಮೆ ಇದ್ದು ಅದನ್ನು ಹೆಚ್ಚು ಹೆಚ್ಚು ಸಮೀಪಿಸುತ್ತವೆ. ಹೀಗೆಯೇ 1.5, 1.42, 1.415, ... ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗಗಳು 2ಕ್ಕಿಂತ ಅಧಿಕವಾಗಿದ್ದು, ಅದನ್ನು ಹೆಚ್ಚು ಹೆಚ್ಚು ಸಮೀಪಿಸುತ್ತವೆ. 1.4, 1.41, 1.5, 1.42, ... ಮುಂತಾದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೆಲ್ಲಾ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದ್ದರಿಂದ, ಅವನ್ನೆಲ್ಲಾ ನಮ್ಮ ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಚಿತ್ರಿಸಲು ಸಾಧ್ಯ (ಶ್ರಮವಿರಬಹುದು, ಅದರ ಮಾತು ಇಲ್ಲಿ ಇಲ್ಲ, ಹೇಗೋ ಚಿತ್ರಿಸಬಹುದು). $\sqrt{2}$ **ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆ ಇದೆ** ಎಂದು ಒಪ್ಪಿಕೊಂಡಿದ್ದೇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಅದನ್ನು ಚಿತ್ರಿಸುವ ಬಿಂದು 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, ... ಬಿಂದುಗಳ ಬಲಕ್ಕೂ 1.5, 1.42, 1.415, 1.4143, ... ಬಿಂದುಗಳ ಎಡಕ್ಕೂ ಇರಬೇಕು. ಈ ಬಿಂದು ರೇಖೆಯನ್ನು ಇಬ್ಭಾಗ ಮಾಡಿ ಒಂದು ಕಡೆ 1.4, 1.41, ... ಬಿಂದುಗಳನ್ನೂ, ಮತ್ತೊಂದು ಕಡೆ 1.5, 1.42, .. ಬಿಂದುಗಳನ್ನೂ ಕೊಡುತ್ತದೆ.

ಈ ಉದಾಹರಣೆಯ ತತ್ವವನ್ನೇ ವಿಸ್ತರಿಸುತ್ತ, ಡೆಡಿಕಿಂಡ್ (1831–1916) ಎಂಬ ಜರ್ಮನಿದೇಶದ ಗಣಿತ ವಿದ್ವಾಂಸನು 1872 ರಲ್ಲಿ ವಾಸ್ತವಸಂಖ್ಯೆಯ ಭಾವನೆಯನ್ನು ಮೂಡಿಸಿದನು.

2.30 ಡೆಡಿಕಿಂಡ್ ಛೇದನ

ವ್ಯಾಖ್ಯೆ. ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯಾಗಣವಾದ Q ನ ಎರಡು ಅಶೂನ್ಯ ಉಪಗಣಗಳು A, B ಆಗಿರಲಿ. ಇವುಗಳು ಕೆಳಗಿನ ಗುಣಗಳನ್ನು ಪಡೆದಿರಲಿ.

i) $A \cup B = Q$

ii) $a \in A, b \in B$, ಆಗ $a \leqslant b$

iii) $A \cap B$ ಎಂಬ ಗಣದಲ್ಲಿ ಒಂದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಅಂಶವಿಲ್ಲ.

ಹೀಗಿದ್ದರೆ, A. B ಉಪಗಣಗಳು ಒಂದು "ಡೆಡಿಕಿಂಡ್ ಛೇದನ" ವನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡುತ್ತವೆ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಈ ಛೇದನವನ್ನೇ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂದೂ ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

Further, if $A \cap B$ is the null set, the number is called an *irrational number*. If $A \cap B$ contains just one element, the section gives only a rational number.

This new notion may be easily understood if explained at greater length and illustrated.

Let all rational numbers be divided into two classes according to some property. For example, let the property be that the square of the number $\geqslant 2$. Let all positive numbers (1.5, 1.42 etc.) having this property be put in the class (or sub-set) B. Let all positive numbers which do not have this property (viz. the square < 2) be put in the sub-set A. Further let zero and all negative numbers be put in A.

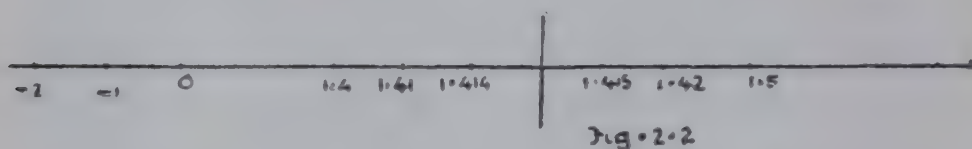


Fig. 2·2

It is evident that all the three properties in the definition are satisfied. The sets A and B together contain all rational numbers. Every number in A is less than any number in B. Since $\sqrt{2}$ is not a rational number, the square of no rational number is equal to 2. Hence $A \cap B = \phi$.

The division or cut made by the sets A and B will itself be called $\sqrt{2}$. This is an irrational number, since $A \cap B = \phi$. The definition is clarified by the above figure (not drawn to scale) of the number-line.

A and B will be called respectively as the left and right sub-sets.

Let us take 4 instead of 2 in the above example. If the square of a positive rational number $\geqslant 4$, let us put that number in B. Otherwise, if its square < 4, such a positive number will be put in A. All negative numbers and zero will be put in A.

ಮತ್ತು $A \cap B$ ಗಣವು ಶೂನ್ಯಗಣವಾದರೆ, ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. $A \cap B$ ಗಣದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಅಂಶ ಮಾತ್ರ ಇದ್ದರೆ, ಛೇದನವು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನೇ ಕೊಡುತ್ತದೆ.

ಭಾಷೆಯನ್ನು ವಿಸ್ತರಿಸಿ ಬರೆದು ಉದಾಹರಿಸಿದರೆ, ಈ ನೂತನ ಭಾವನೆಯೂ ಸುಲಭವಾಗಿ ತಿಳಿದೀತು.

ಯಾವುದೋ ಒಂದು ಗುಣಕ್ಕೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ ಎಲ್ಲ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಎರಡು ಗುಂಪುಗಳಾಗಿ ಮಾಡೋಣ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಸಂಖ್ಯೆಯ ವರ್ಗ $\geqslant 2$ ಎಂಬುದೇ ಗುಣವಾಗಿರಲಿ. ಈ ಗುಣವಿರುವ ಧನಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನೆಲ್ಲಾ (1.5, 1.42, ಮುಂತಾದುವು) B ಗುಂಪಿನಲ್ಲಿ (ಉಪಗಣದಲ್ಲಿ) ಹಾಕೋಣ. ಈ ಗುಣವಿಲ್ಲದಿರುವ (ಎಂದರೆ ವರ್ಗ < 2) ಧನಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನೆಲ್ಲಾ A ಉಪಗಣದಲ್ಲಿ ಹಾಕೋಣ. ಸೊನ್ನೆ ಮತ್ತು ಋಣಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನೂ A ನಲ್ಲೇ ಹಾಕೋಣ

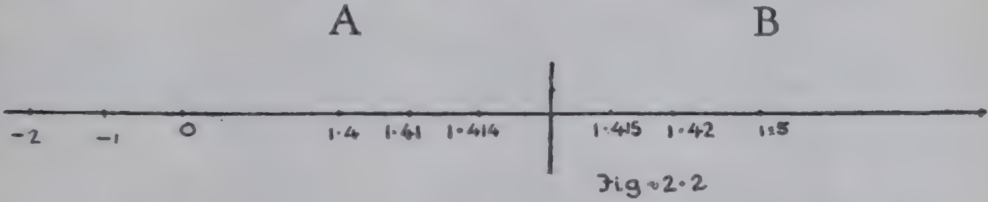


Fig. 2·2

ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿರುವ ಮೂರು ಗುಣಗಳೂ ಸರಿ ಇವೆ ಎಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟ. ಹೇಗೆಂದರೆ, A, B ಗಣಗಳು ಒಟ್ಟು ಗೂಡಿ ಎಲ್ಲ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನೂ ಕೊಡುತ್ತವೆ. A ನಲ್ಲಿರುವ ಪ್ರತಿಸಂಖ್ಯೆಯೂ B ನಲ್ಲಿರುವ ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆಗಿಂತ ಚಿಕ್ಕದು. $\sqrt{2}$ ಎಂಬ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಇಲ್ಲದ್ದರಿಂದ, ಯಾವ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯ ವರ್ಗವೂ 2 ಅಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ $A \cap B = \phi$;

A, B ಗಣಗಳು ಉಂಟುಮಾಡುವ ಛೇದನವನ್ನೇ $\sqrt{2}$ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. $A \cap B = \phi$ ಆದ್ದರಿಂದ, ಇದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ. ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಮೇಲಣ ಚಿತ್ರವು (ಅಳತೆಗೆ ಸರಿಯಾಗಿಲ್ಲ) ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯನ್ನು ವಿಶದಗೊಳಿಸುತ್ತದೆ.

A, B ಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಎಡ ಉಪಗಣ, ಬಲ ಉಪಗಣ ಎಂದು ಕರೆಯುವೆವು.

ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ 2ಕ್ಕೆ ಬದಲು 4 ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಒಂದು ಧನ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯ ವರ್ಗ $\geqslant 4$ ಆದರೆ, ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು B ನಲ್ಲಿ ಹಾಕೋಣ. ಇಲ್ಲದಿದ್ದರೆ, ಎಂದರೆ ಅದರ ವರ್ಗ < 4 ಆದರೆ, ಅಂಥ ಧನ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು A ನಲ್ಲಿ ಹಾಕೋಣ. ಎಲ್ಲಾ ಋಣ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನೂ ಸೊನ್ನೆಯನ್ನೂ A ನಲ್ಲೇ ಹಾಕೋಣ.

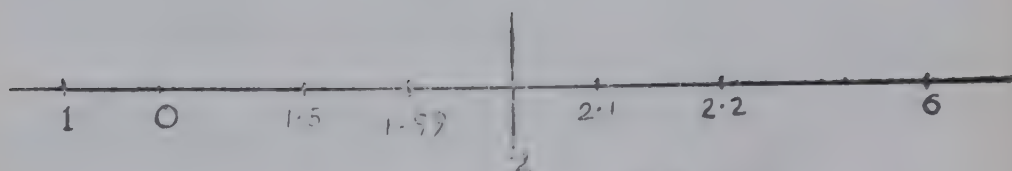


Fig - 2·3

The section is now the number 2. This division is itself the definition of the number 2.

In such examples it is enough if we use positive numbers only, and use the set of positive rational numbers instead of the set Q.

Other Examples.

(1) Let all negative rational numbers lie in A, while zero and positive rational numbers lie in B. The section is the number 0.

(2) Place the rational numbers x which make $x+1<0$ in A, and those which make $x+1 \geqslant 0$ in B. The section is the number -1.

(3) Place rational numbers x which are such that $x^2-x-6<0$ in A, and those which are such that $x^2-x-6 \geqslant 0$ in B.

$\therefore$ A contains $-3<x<2$,
while B contains $x \geqslant 2$ or $x \leqslant -3$.

This does not give a section. The condition (ii) of the definition is not satisfied.

2.31. The set of real numbers will be called R.

It is clear that $R \supset Q \supset J \supset N$.

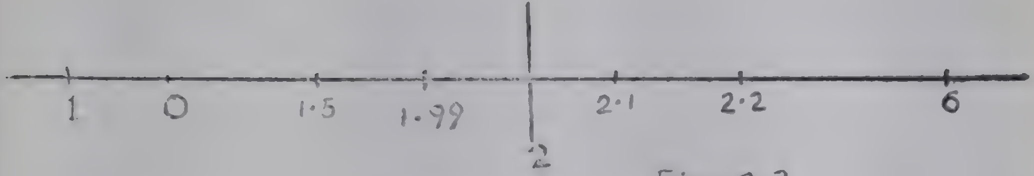
2.32. Operations

(1) *Addition.* Let α, β be two real numbers. Let the number α be given by the section (A_1, B_1) and β by (A_2, B_2).

Now, form the sets

$$A = \{ a_1 + a_2 ; \quad a_1 \in A_1, a_2 \in A_2 \}$$

and $B = \{ b_1 + b_2 ; \quad b_1 \in B_1, b_2 \in B_2 \}$



ಈಗ ಛೇದನವು 2 ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗುತ್ತದೆ. $A \cap B = 2$. ಈ ಛೇದನವೇ 2 ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯ ವ್ಯಾಖ್ಯೆ.

ಇಂಥ ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ ಧನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಉಪಯೋಗಿಸಿ Q ಗಣಕ್ಕೆ ಬದಲು ಧನ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿದರೆ ಸಾಕು.

ಇತರ ಉದಾಹರಣೆಗಳು :

(1) A ನಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲಾ ಋಣ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿರಲಿ. B ನಲ್ಲಿ ಸೊನ್ನೆಯೂ ಧನ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೂ ಇರಲಿ. ಛೇದನವು 0 ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆ.

(2) $x+1 < 0$ ಆಗತಕ್ಕ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ x ನ್ನು A ನಲ್ಲಿಯೂ, $x+1 \geqslant 0$ ಆಗತಕ್ಕವನ್ನು B ನಲ್ಲಿಯೂ ಇಡಿ. ಛೇದನವು -1 ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆ.

(3) $x^2-x-6 < 0$ ಆಗುವಂತಹ x ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು A ನಲ್ಲೂ $x^2-x-6 \geqslant 0$ ಆಗುವ x ನ್ನು B ನಲ್ಲೂ ಇಡಿ.

$\therefore \quad -3 < x < 2,$ A ನಲ್ಲಿ

$x \geqslant 2$, ಅಥವಾ $x \leqslant -3$, B ನಲ್ಲಿ.

ಇದು ಛೇದನವನ್ನು ಕೊಡುವುದಿಲ್ಲ. ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯ (ii)ನೇ ನಿಯಮ ಪಾಲಿತವಾಗುವುದಿಲ್ಲ.

2.31. ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣವನ್ನು R ಎಂದು ಕರೆಯುವೆವು.

$R \supset Q \supset J \supset N$ ಎಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿದೆ.

2.32. ಪರಿಕರ್ಮಗಳು.

(1) **ಸಂಕಲನ.** α, β ಎರಡು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರಲಿ. α ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು (A_1, B_1) ಛೇದನವೂ β ವನ್ನು (A_2, B_2) ಛೇದನವೂ ಕೊಡುತ್ತದೆ ಎನ್ನೋಣ. ಈಗ

$$A = \{a_1 + a_2 : a_1 \in A_1, a_2 \in A_2\}$$

ಮತ್ತು $B = \{b_1 + b_2 ; b_1 \in B_1, b_2 \in B_2\}$

Then (A, B) is a Dedekind section. This will be clear because $A \cap B = Q$ and $a_1 + a_2 \leqslant b_1 + b_2$,

Some analysis is necessary to prove that $A \cap B$ does not contain more than one element. We shall not give it here,

The section (A, B) will be defined as $\alpha + \beta$.

(2) *Negative numbers.* Let the positive number α correspond to the section (A, B).

Call the set $\{ -b \,;\, b \in B \}$ as A' and the set

$\{ -a \,;\, a \in A \}$ as B'. Then (A', B') forms a section.

This will be called $-\alpha$.

By the process given in (1), it can easily be seen that $\alpha + (-\alpha) = 0$. Hence the notation $-\alpha$ is justified. The number $-\alpha$ is the additive inverse of α.

(3) *Multiplication.* First assume that α and β are positive. Let α correspond to the section (A_1, B_1) and β to (A_2, B_2).

Form the set

$$B = \{ b_1 b_2 \,;\, b_1 \in B_1, b_2 \in B_2 \} \text{ and take } A = Q - B.$$

Then $\{ A, B \}$ is a section. The details of the proof will not be given here. The section $\{ A, B \}$ will be called the product of the numbers α and β, and will be denoted by $\alpha \ \beta$

If α and β are not both positive, we use the definition of a negative number given in (2), and then define

$$\alpha \cdot (-\beta) = -(\alpha \cdot \beta) = \beta \cdot (-\alpha)$$

$$(-\alpha) \cdot (-\beta) = \alpha \cdot \beta$$

$$\alpha \cdot 0 = 0 = 0 \cdot \alpha$$

We can thus obtain the product of α and β, in all cases.

ಎಂಬ ಗಣಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿದರೆ, (A, B) ಎಂಬುದು ಒಂದು ಡೆಡಿಕಿಂಡ್ ಛೇದನವಾಗುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನು ಕಾಣಲು, $A \cup B = Q$ ಎಂಬುದೂ, $a_1 + a_2 \leq b_1 + b_2$ ಎಂಬುವೂ ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿಯೇ ಇದೆ. $A \cap B$ ಗಣದಲ್ಲಿ ಒಂದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಅಂಶವಿಲ್ಲ ಎಂಬುದನ್ನು ಸಮರ್ಥಿಸಲು ಸ್ವಲ್ಪ ವಿಶ್ಲೇಷಣ ಗಣಿತವು ಬೇಕಾಗುತ್ತವೆ. ಇಲ್ಲಿ ಅದನ್ನು ಕೊಡುವುದಿಲ್ಲ.

(A, B) ಛೇದನವನ್ನು $\alpha + \beta$ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. (2) **ಋಣಸಂಖ್ಯೆ** α ಎಂಬ ಧನ ಸಂಖ್ಯೆಯು (A, B) ಛೇದನದಿಂದ ಬರಲಿ.

ಈಗ $\{-b ; b \in B\}$ ಗಣವನ್ನು A' ಎಂದೂ $\{-a ; a \in A\}$ ಗಣವನ್ನು B' ಎಂದೂ ಕರೆದರೆ, (A', B') ಒಂದು ಛೇದನವಾಗುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನು $-\alpha$ ಎಂದು ಕರೆಯುವೆವು.

(1)ರಲ್ಲಿ ತಿಳಿಸಿರುವ ಸಂಕಲನದಿಂದ, $\alpha + (-\alpha) = 0$ ಎಂದು ಸುಲಭವಾಗಿ ಗ್ರಹಿಸಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ $-\alpha$ ಎಂಬ ಚಿಹ್ನೆಗೆ ಸಮರ್ಥನೆ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. $-\alpha$ ಸಂಖ್ಯೆಯು α ದ ಸಂಕಲನ ಪ್ರತಿಲೋಮ.

(3) **ಗುಣಾಕಾರ.** ಮೊದಲು α, β ಧನಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರಲಿ. α ಸಂಖ್ಯೆಯು (A_1, B_1) ಛೇದನದಿಂದಲೂ, β (A_2, B_2) ಛೇದನದಿಂದಲೂ ಬರಲಿ.

$$A = \{a_1 a_2 ; a_1 \in A_1, a_2 \in A_2\}$$

$$B = \{b_1 b_2 ; b_1 \in B_1, b_2 \in B_2\},$$ (a_1, a_2, b_1, b_2 ಧನ) ಆದರೆ {A, B} ಒಂದು ಛೇದನವಾಗುತ್ತದೆ. ಸಾಧನೆಯನ್ನು ಪೂರ್ತಾ ಇಲ್ಲಿ ಕೊಡುವುದಿಲ್ಲ. {A, B} ಛೇದನವನು $\alpha\beta$ ಅಥವಾ α, β ಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವೆನ್ನುವೆವು.

α, β ಧನಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲದಾಗ, ಋಣಸಂಖ್ಯೆಯ ವ್ಯಾಖ್ಯೆ (2) ಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ.

$$\alpha \cdot (-\beta) = -(\alpha \cdot \beta) = \beta \cdot (-\alpha)$$

$$(-\alpha) \cdot (-\beta) = \alpha \cdot \beta$$

$$\alpha \cdot 0 = 0 = 0 \cdot \alpha$$

ಎಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಿ, α, β ಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ.

(4) *Division*. First let α be a positive number, corresponding to the section (A, B).

Form the sets $A' = \{ 1/b \,;\, b \in B \}$ and $B' = Q - A'$.

Then (A', B') forms a section. If we denote this as α^{-1} we can see by the process of multiplication that $\alpha \cdot \alpha^{-1} = 1$.

Hence α^{-1} can also be denoted by $1/\alpha$. We call this as the reciprocal of α.

If α is negative, we define $1/\alpha$ as $-(1/-\alpha)$.

Finally, if β is not zero, we define α/β as $\alpha \cdot (1/\beta)$.

2.33. Properties. In the light of the above definitions, the associative and commutative laws that are true for rational numbers also hold good for real numbers. Hence for any real numbers α, β, γ.

$$\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$$
$$\alpha + \beta = \beta + \alpha$$
$$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = (\alpha \cdot \beta) + (\alpha \cdot \gamma)$$
$$(\alpha + \beta) \cdot \gamma = (\alpha \cdot \gamma) + (\beta \cdot \gamma)$$
$$\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$$
$$\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma.$$

The 0 and 1 of the set J are the identity elements of addition and multiplication for the real numbers too. In other words, if α is any real number,

$$\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$$
$$\alpha \cdot 1 = 1 \cdot \alpha = \alpha.$$

These can be proved by using the sections for 0 and 1, and the definitions of addition and multiplication.

The additive inverse of α is $-\alpha$, the multiplicative inverse is $1/\alpha$. These have been obtained above.

(4) **ಭಾಗಹಾರ.** ಮೊದಲು α ಧನಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿ, (A, B) ಛೇದನವನ್ನು ಸೂಚಿಸಲಿ.

$$A' = \left\{ \frac{1}{b};\ b \in B \right\}, \text{ಮತ್ತು } B' = \left\{ \frac{1}{a};\ a \in A \right\} \text{ಆದರೆ}$$

(A', B') ಒಂದು ಛೇದನವನ್ನು ಕೊಡುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನು α^{-1} ಎಂದು ಬರೆದರೆ, ಗುಣಾಕಾರ ಕ್ರಮದಿಂದ, $\alpha.\ \alpha^{-1} = 1$ ಎಂದು ನೋಡಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ, α^{-1} ಎಂಬುದನ್ನು $1/\alpha$ ಎಂದೂ ಬರೆಯಬಹುದು. ಇದನ್ನು α ವಿನ ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮ ಎನ್ನುವೆವು,

α ಋಣಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೆ, $1/\alpha = -(1/-\alpha)$ ಎಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸುವೆವು.

ಕಡೆಯದಾಗಿ, β ಸೊನ್ನೆಯಾಗಿರದಿದ್ದರೆ, $\alpha/\beta = \alpha\cdot(1/\beta)$ ಎಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸುವೆವು.

2.33. **ಗುಣಗಳು.** ಮೇಲಿನ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಗಳಿಗನುಸಾರವಾಗಿ, ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಇರುವ ಸಹವರ್ತನ ಪರಿವರ್ತನ ಗುಣಗಳು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೂ ಅನ್ವಯಿಸುತ್ತವೆ. ಈ ಪ್ರಕಾರ ಯಾವುದೇ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆ α, β, γ ಗಳಿಗೆ

$$\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$$

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha$$

$$\alpha\cdot(\beta + \gamma) = (\alpha\cdot\beta) + (\alpha\cdot\gamma)$$

$$(\alpha + \beta)\cdot\gamma = (\alpha\cdot\gamma) + (\beta\cdot\gamma)$$

$$\alpha\cdot\beta = \beta\cdot\alpha$$

$$\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma) = (\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma$$

J ಗಣದಲ್ಲಿರುವ 0 ಮತ್ತು 1 ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೂ ಸಹ ಸಂಕಲನ ಏಕ ಮತ್ತು ಗುಣಾಕಾರದ ಏಕವಾಗುತ್ತವೆ.

ಎಂದರೆ $\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$

$\alpha\cdot 1 = 1\cdot\alpha = \alpha$, α ಯಾವುದೇ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆ. 0 ಮತ್ತು 1 ರ ಛೇದನಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ, ಸಂಕಲನ ಗುಣಾಕಾರ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಗಳಿಂದ ಇವನ್ನು ಸಾಧಿಸಬಹುದು.

α ಗೆ ಸಂಕಲನದ ಪ್ರತಿಲೋಮವು $-\alpha$; ಗುಣಾಕಾರದ ಪ್ರತಿ ಲೋಮ $1/\alpha$ ಇವನ್ನು ಮೇಲೆ ಪಡೆದಿದ್ದೇವೆ.

2.34. Order. Let the section (A_1, B_1) denote the real number α, and the section (A_2, B_2) denote the number β.

Let $A_1 = \{a_1\}$, $B_1 = \{b_1\}$, $A_2 = \{a_2\}$, $B_2 = \{b_2\}$.

(1) If $A_1 = A_2$ and $B_1 = B_2$, then every element a_1 of A_1 lies is A_2, and every element a_2 of A_2 lies in A_1.

Similarly for $B_1 = B_2$. We then say $\alpha = \beta$.

(2) Let every $a_1 \in A_2$, but there is at least one element $a_2 \notin A_1$. (The number-line easily enables us to grasp the idea). This can also be expressed by saying that every $b_1 \notin B_2$.

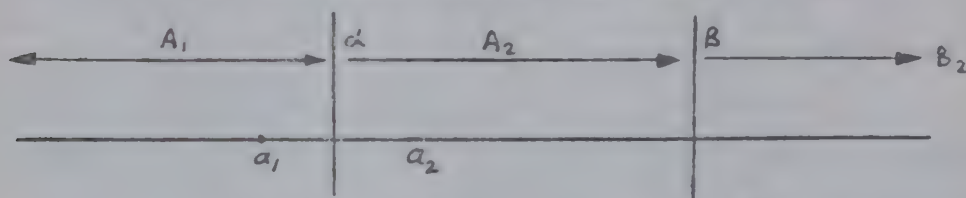


fig 2·4

In this case, $\alpha < \beta$. In the figure α is to the left of β.

(3) Similarly if α is to the right of β, then $\alpha > \beta$. Now there is at least one element $a_1 \notin A_2$.

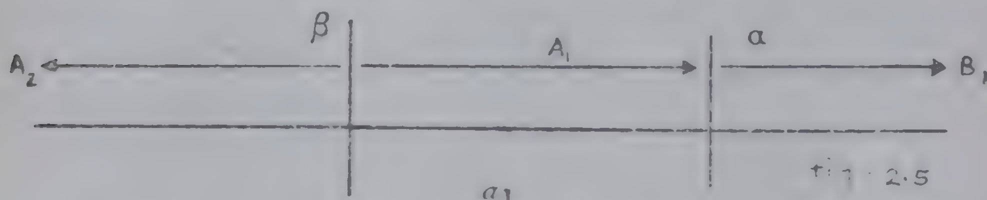


fig 2·5

Since a_1, a_2 etc. are rational numbers, they possess the properties of trichotomy and linear order. Therefore trichotomy and linear order hold for real numbers too.

Two other very important properties will be clear from the above figures. When α and β are different numbers $\{$ i.e. $\alpha < \beta$ or $\alpha > \beta$ $\}$, then between the sections representing them, there exist an infinite number of a_2 elements or a_1 elements. Hence we have

Theorem 33. *Between two distinct real numbers, there exist an infinite number of rational numbers.*

2.34 **ಕ್ರಮ.** (A_1, B_1) ಛೇದನವು α ಎಂಬ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನೂ (A_2, B_2) ಛೇದನವು β ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನೂ ಸೂಚಿಸಲಿ.

$A_1 = \{a_1\} \cdot B_1 = \{b_1\} \cdot A_2 = \{a_2\} \cdot B_2 = \{b_2\}$.

(1) $A_1 = A_2$, ಮತ್ತು $B_1 = B_2$ ಆದರೆ, ಎಂದರೆ A_1 ನ ಪ್ರತಿ ಅಂಶ a_1, A_2 ನಲ್ಲಿಯೂ A_2 ನ ಪ್ರತಿ ಅಂಶ a_2, A_1 ನಲ್ಲಿಯೂ ಇರುತ್ತದೆ. ಹೀಗೆಯೇ $B_1 = B_2$ ಗೆ, $\alpha = \beta$ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

(2) ಪ್ರತಿ a_1, A_2 ನಲ್ಲಿದೆ; ಆದರೆ A_1 ನಲ್ಲಿಲ್ಲದ ಒಂದಾದರೂ a_2 ಇದೆ, (ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯಿಂದ ಗ್ರಹಿಸುವುದು ಸುಲಭ), ಇದನ್ನೇ ಪ್ರತಿ b_1, B_2 ನಲ್ಲಿ

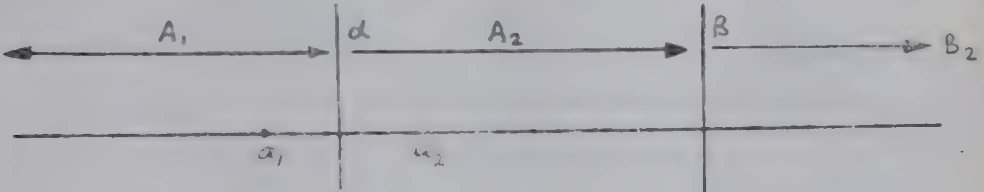


fig 2.4

ಇಲ್ಲ ಎಂದು ಹೇಳಬಹುದು.

ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ $\alpha < \beta$. ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ α, β ನ ಎಡಕ್ಕಿದೆ.

(3) ಹೀಗೆಯೇ α, β ನ ಬಲಕ್ಕಿದ್ದರೆ, $\alpha > \beta$. ಈಗ A_2 ನಲ್ಲಿಲ್ಲದ

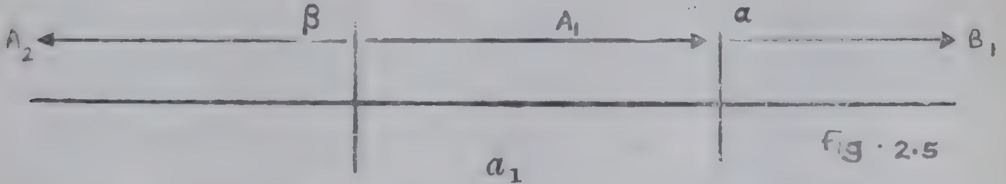


Fig · 2.5

ಒಂದಾದರೂ a_1 ಅಂಶ ಇರುತ್ತದೆ.

a_1, a_2 ಮುಂತಾದುವುಗಳು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದುದರಿಂದ, ಅವಕ್ಕೆ ತ್ರಿಚ್ಛೇದ್ಯತೆಯೂ ಸಾಲುಕ್ರಮವೂ ನಿಜವಿರುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೂ ತ್ರಿಚ್ಛೇದ್ಯತೆಯೂ ಸಾಲುಕ್ರಮವೂ ನಿಜವಿರುತ್ತವೆ.

ಮೇಲಿನ ಚಿತ್ರಗಳ ಸಹಾಯದಿಂದ ಇನ್ನೆರಡು ಬಹು ಮುಖ್ಯಗುಣಗಳು ವ್ಯಕ್ತವಾಗುತ್ತವೆ. α, β ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದಾಗ, (ಎಂದರೆ $\alpha < \beta$ ಅಥವಾ $\alpha > \beta$), ಅವುಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಛೇದನಗಳ ನಡುವೆ a_2 ಅಂಶಗಳಾಗಲಿ a_1 ಅಂಶಗಳಾಗಲಿ ಅನಂತವಾಗಿವೆ. ಎಂದರೆ,

ಪ್ರಮೇಯ 33. ಎರಡು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ನಡುವೆ ಅನಂತ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಇರುತ್ತವೆ.

Let us call two of these as p, q, and let $p < q$.

Now $p+1/\sqrt{2}\,(q-p)$ is a number greater than p (Since $q-p$ is positive) and $< p+(q-p) = q$. Hence $p+1/\sqrt{2}\,(q-p)$ is an irrational number lying between p and q. We may use $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, etc. in place of $\sqrt{2}$. Thus $p+\theta\,(q-p)$, (where θ is a positive irrational number < 1) is an irrational number lying between p and q. Hence, we have

Theorem 34. *Between two real numbers, there also exist an infinite number of irrational numbers.*

The set of irrational numbers is thus a dense set (see Ex. 6, Exercises 2.3).

2.35. *Another definition for real numbers.* Suppose M is a number such that no number of a given set exceeds M. This means that all the elements of the set are either less than M, or some (or all) may be equal to M. Then M is called an upper bound of the set. If M is an upper bound, all numbers greater than M are also upper bounds. Ex: In the set $\{1, 2, -3, 0, -1\}$, 2 is an upper bound. $2\frac{1}{2}$, 4, 100 are also upper bounds. For the set $\{1.9, 1.99, 1.999, \ldots\}$, 2 is an upper bound, 3, 4, ... are also upper bounds.

The following property will be considered as an axiom.

Axiom of Continuity. If a non-empty set has upper bounds, it has a least upper bound.

In a similar manner, we can introduce the notions of lower bound, and the greatest lower bound.

If a non-empty set has lower bounds, it has a greatest lower bound.

ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಎರಡನ್ನು p, q ಎಂದು ಕರೆಯೋಣ. $p < q$ ಆಗಿರಲಿ. ಈಗ $p + \frac{1}{\sqrt{2}}(q-p)$ ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯು p ಗಿಂತ ಅಧಿಕ ($q-p$ ಧನವಾದ್ದರಿಂದ), ಮತ್ತು $< p+(q-p)=q$. ಆದ್ದರಿಂದ $p + \frac{1}{\sqrt{2}}(q-p)$ ಎಂಬುದು p, q ಗಳ ನಡುವೆ ಇರುವ ಒಂದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ. $\sqrt{2}$ ಗೆ ಬದಲಾಗಿ $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}\ldots$ ಮುಂತಾದುವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ, $p+\theta(q-p)$, ($\theta < 1$ ಆಗಿರುವ ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಧನಸಂಖ್ಯೆ), p, q ಗಳ ನಡುವೆ ಇರುವ ಅಭಾಗಲಬ್ಧಸಂಖ್ಯೆ. ಆದ್ದರಿಂದ,

ಪ್ರಮೇಯ 34. ಎರಡು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ನಡುವೆ ಅನಂತ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೂ ಇವೆ.

ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯಾಗಣವು ಸಾಂದ್ರತೆಯನ್ನು ಪಡೆದಿದೆ. (ಅಭ್ಯಾಸ 2.3. ಉದಾ. 6 ನೋಡಿ)

2.35. **ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಬೇರೊಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯೆ.** ಒಂದು ಗಣದಲ್ಲಿರುವ ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆ M ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಮೀರದಿರಲಿ. ಎಂದರೆ ಗಣದ ಅಂಶಗಳೆಲ್ಲಾ M ಗಿಂತ ಕಡಮೆ. M ಗೆ ಸಮನಾಗಿದ್ದರೂ ಇರಬಹುದು. ಆಗ M ನ್ನು ಗಣದ ಒಂದು ಮೇಲ್ಗಡಿ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. M ಮೇಲ್ಗಡಿಯಾದರೆ, M ಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚಾದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೂ ಮೇಲ್ಗಡಿಗಳೇ.

ಉದಾ : $\{1, 2, -3, 0, -1\}$ ಎಂಬ ಗಣದಲ್ಲಿ 2 ಒಂದು ಮೇಲ್ಗಡಿ. $2\frac{1}{2}$, 4, 100 ಇವೂ ಮೇಲ್ಗಡಿಗಳು. $\{1.9, 1.99, 1.999, \ldots\}$ ಗಣಕ್ಕೆ 2 ಮೇಲ್ಗಡಿ. 3, 4, . . . ಇತ್ಯಾದಿಗಳೂ ಮೇಲ್ಗಡಿಗಳು.

ಕೆಳಗಿನ ಗುಣವನ್ನು ಒಂದು ಸ್ವತಸ್ಸಿದ್ಧ ಪ್ರಮಾಣವೆಂದು ಭಾವಿಸುವೆವು.

ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನತೆಯಸ್ವತಸ್ಸಿದ್ಧ ಪ್ರಮಾಣ ಒಂದು ಅಶೂನ್ಯ ಸಂಖ್ಯಾ ಗಣಕ್ಕೆ ಮೇಲ್ಗಡಿಗಳಿದ್ದರೆ, ಗಣಕ್ಕೆ ಒಂದು ಕನಿಷ್ಠ ಮೇಲ್ಗಡಿ ಇರುತ್ತದೆ.

ಇದರಂತೆಯೇ ಕೆಳಗಡಿ, ಗರಿಷ್ಠ ಕೆಳಗಡಿ ಎಂಬ ಭಾವನೆಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿಪಾದಿಸಬಹುದು. **ಒಂದು ಅಶೂನ್ಯ ಸಂಖ್ಯಾಗಣಕ್ಕೆ ಕೆಳಗಡಿಗಳಿದ್ದರೆ, ಒಂದು ಗರಿಷ್ಠ ಕೆಳಗಡಿ ಇರುತ್ತದೆ.**

In both the examples given above, the least upper bound is 2.

For the set $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, 1/n, \ldots\}$, the greatest lower bound is 0. The greatest lower bound or the least upper bound may or may not be an element of the set.

By assuming that the numbers of a set are ordered, we can prove the existence of the greatest lower bound and the least upper bound by using Dedekind's section. If dedekind's section is not used, their existence will have to be taken as an axiom.

Definition. *The least upper bound of any set of rational numbers is a real number.*

If this least upper bound is not a rational number, it is called an irrational number.

Let us take the example given in 2.30. Let S be the set of positive numbers whose squares do not exceed 2.

$\therefore$ $S = \{1.4, 1.41, 1.414, 1{\cdot}4142 \ldots\}$. By our axiom, this set has a least upper bound. This least upper bound will be called $\sqrt{2}$. The square of no number of the set is equal to 2 Therefore $\sqrt{2}$ is not an element of the set, it is an irrational number.

The set of positive numbers whose squares do not exceed 4 has the least upper bound 2. 2 is an element of the set, it is a rational number.

2 36 Let α be the least upper bound of a set S of rational numbers. Let us place α and all rational numbers greater than α in the set B. Let us put all other rational numbers in the set A. Then (A, B) is a Dedekind's section. The number corresponding to the section is α.

Therefore, after proving that the rational numbers are ordered, both the definitions that we given for a real number become equivalent. When a real number is defined by a Dedekind section, the existence of the least upper bound can be proved. This least upper bound itself is the Dedekind section.

ಮೇಲಣ ಎರಡು ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲೂ, ಕನಿಷ್ಠ ಮೇಲ್ಗಡಿ 2. $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \}$ ಎಂಬ ಗಣಕ್ಕೆ ಗರಿಷ್ಠ ಕೆಳಗಡಿ 0. ಗರಿಷ್ಠ ಕೆಳಗಡಿ. ಅಥವಾ ಕನಿಷ್ಠ ಮೇಲ್ಗಡಿ ದತ್ತಗಣದ ಅಂಶವಾಗಿರಬಹುದು, ಇಲ್ಲದಿರಬಹುದು.

ಗಣದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಕ್ರಮಯುಕ್ತವೆಂದು ಭಾವಿಸಿ, ಡೆಡಿಕಿಂಡ್ ಛೇದನದಿಂದ ಕನಿಷ್ಠ ಗರಿಷ್ಠ ಗಡಿಗಳ ಇರುವಿಕೆಯನ್ನು ಸಾಧಿಸಬಹುದು. ಡೆಡಿಕಿಂಡ್ ಛೇದನವನ್ನೂ ತರದಿದ್ದರೆ, ಇದನ್ನು ಸ್ವತಸ್ಸಿದ್ಧಪ್ರಮಾಣವೆಂದು ಅಂಗೀಕರಿಸಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ.

ವ್ಯಾಖ್ಯೆ. ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಯಾವುದೇ ಗಣದ ಕನಿಷ್ಠ ಮೇಲ್ಗಡಿಯನ್ನು ವಾಸ್ತವಸಂಖ್ಯೆ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಈ ಕನಿಷ್ಠ ಮೇಲ್ಗಡಿಯು ಭಾಗಲಬ್ಧವಾಗಿಲ್ಲದಿದ್ದರೆ, ಅದನ್ನು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುವುದು.

2.30ರಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನೇ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಸಂಖ್ಯೆಯ ವರ್ಗವು 2ನ್ನು ಮೀರದ ಧನಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣವು S ಆಗಿರಲಿ.

$\therefore S = \{1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, \ldots\}$ ಸ್ವತಸ್ಸಿದ್ಧ ಪ್ರಮಾಣದಂತೆ, ಈ ಗಣಕ್ಕೆ ಕನಿಷ್ಠ ಮೇಲ್ಗಡಿ ಇದೆ. ಈ ಮೇಲ್ಗಡಿಯನ್ನು $\sqrt{2}$ ಎಂದು ನಾಮಕರಣ ಮಾಡುವೆವು. ಗಣದಲ್ಲಿರುವ ಯಾವ ಸಂಖ್ಯೆಯ ವರ್ಗವೂ 2 ಆಗದಿದ್ದುದರಿಂದ, $\sqrt{2}$ ಗಣದಲ್ಲಿಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ $\sqrt{2}$ ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ.

ಸಂಖ್ಯೆಯ ವರ್ಗವು 4ನ್ನು ಮೀರದ ಧನಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣಕ್ಕೆ ಕನಿಷ್ಠ ಮೇಲ್ಗಡಿ 2. 2 ಗಣದಲ್ಲಿದೆ, ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ.

2.36. ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳುಳ್ಳ ಒಂದು ಗಣ S ಗೆ, ಕನಿಷ್ಠ ಮೇಲ್ಗಡಿಯನ್ನು α ಎಂದು ಕರೆಯೋಣ. α ವನ್ನೂ α ಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚಾದ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನೂ B ಎಂಬ ಗಣದಲ್ಲಿಡೋಣ. ಉಳಿದ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನೂ A ಎಂಬ ಗಣದಲ್ಲಿಡೋಣ. ಈಗ (A, B) ಎಂಬುದು ಒಂದು ಡೆಡಿಕಿಂಡ್ ಛೇದನವಾಗುತ್ತದೆ. ಛೇದನ ಸಂಖ್ಯೆಯೇ α.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಕ್ರಮಯುಕ್ತವಾಗಿವೆ ಎಂಬ ಗುಣವನ್ನು ಸಾಧಿಸಿದ ಮೇಲೆ, ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ನಾವು ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಎರಡೂ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಗಳೂ ಒಂದೇ ಆಗುತ್ತವೆ. ಡೆಡಿಕಿಂಡ್ ಛೇದನದಿಂದ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಿದ ಮೇಲೆ, ಕನಿಷ್ಠ ಮೇಲ್ಗಡಿ ಇರುವಿಕೆಯನ್ನು ಸಾಧಿಸಬಹುದು. ಈ ಕನಿಷ್ಠ

Conversely, by the Axiom of Continuity, Dedekind's section can be proved as a theorem.

Since both the notions are equivalent, further elaboration is unnecessary.

2.37. Absolute Value.

Definition. *a is any real number. If $a \geqslant 0$, the absolute value of a will be defined as a, while if $a < 0$, its absolute value is defined as $-a$.*

The absolute value of a will be denoted by $|a|$.

Ex. $|3| = 3$; $|0| = 0$; $|-2| = 2$.

Theorem 35. For any two real numbers,

(1) $|ab| = |a| \cdot |b|$.

(2) $|a+b| \leqslant |a| + |b|$.

The truth of these can be seen, by examining all cases.

1. (i) If a, b are both positive, ab is positive

$\therefore |ab| = ab = |a| \cdot |b|$.

(ii) If a, b are both negative, ab is positive

$\therefore |ab| = ab = (-a) \cdot (-b) = |a| \cdot |b|$.

(iii) If a is negative and b positive, ab is negative

$\therefore |ab| = -ab = -a \cdot b = |a| \; |b|$.

[Whether ab is positive or negative has been discussed in Theorem 29 for integers and in 2·25 for rational numbers. After defining the product of two real numbers by the method of Dedekind section (2.32), this theorem is applicable to real numbers also].

2. (i) If $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, then $a + b \geqslant 0$

$|a+b| = a + b = |a| + |b|$.

ಮೇಲ್ಗಡಿಯೇ ಡೆಡಿಕಿಂಡ್ ಛೇದನ, ವಿಲೋಮವಾಗಿ, ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನತೆಯ ಪ್ರಮಾಣದಿಂದ, ಡೆಡಿಕಿಂಡ್ ಛೇದನವನ್ನು ಪ್ರಮೇಯವಾಗಿ ಸಾಧಿಸಬಹುದು.

ಈ ಎರಡೂ ಭಾವನೆಗಳು ಒಂದೇ ಆಗುವುದರಿಂದ, ವಿಷಯವನ್ನು ಇನ್ನೂ ಬೆಳೆಸಿಕೊಂಡು ಹೋಗುವುದು ಅನವಶ್ಯಕ.

2.37 ಧನಾತ್ಮಕ ಬೆಲೆ.

ವ್ಯಾಖ್ಯೆ. **a ಯಾವುದೇ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆ. $a \geqslant 0$ ಆದರೆ, a ಯ ಧನಾತ್ಮಕ ಬೆಲೆ a ಎಂದೂ, $a < 0$ ಆದರೆ, ಅದರ ಧನಾತ್ಮಕ ಬೆಲೆ $-a$ ಎಂದೂ ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ.**

aಯ ಧನಾತ್ಮಕ ಬೆಲೆಯನ್ನು $|a|$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾ: $|3| = 3$; $|0| = 0$; $|-2| = 2$

ಪ್ರಮೇಯ 35. ಯಾವುದೇ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ,

(1) $|ab| = |a| \cdot |b|$

(2) $|a+b| \leqslant |a| + |b|$.

ಎಲ್ಲ ಸಂದರ್ಭಗಳನ್ನೂ ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ, ಇವುಗಳ ನಿಜಾಂಶವನ್ನು ತಿಳಿಯಬಹುದು.

(1) (i) a, b ಎರಡೂ ಧನವಾದರೆ ab ಧನ.

$\therefore \quad |ab| = ab = |a| \cdot |b|$

(ii) a, b ಎರಡೂ ಋಣವಾದರೆ, ab ಧನ

$\therefore \quad |ab| = ab = (-a) \cdot (-b) = |a| \cdot |b|$

(iii) a ಋಣ, b ಧನವಾದರೆ, ab ಋಣ

$\therefore \quad |ab| = -ab = -a \cdot b = |a| \; |b|$.

[abಯು ಧನವೋ ಋಣವೋ ಎಂಬುದನ್ನು ಪ್ರಮೇಯ 29 ರಲ್ಲಿ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಿಗೂ, § 2.25 ರಲ್ಲಿ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೂ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಡೆಡಿಕಿಂಡ್ ಛೇದನದ ಕ್ರಮದಂತೆ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು (§ 2.32) ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಿದ ಮೇಲೆ, ಈ ಪ್ರಮೇಯವು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೂ ಅನ್ವಯಿಸುತ್ತದೆ.]

(2) (i) $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ, $a+b \geqslant 0$

$|a+b| = a+b = |a| + |b|$

(ii) If $a \leqslant 0,\ b \leqslant 0,$ then $-a \geqslant 0,\ -b \geqslant 0.$

$$\therefore -(a+b) = (-a) + (-b) \geqslant 0$$

$$\therefore |a+b| = -(a+b) = -a + (-b)$$
$$= |a| + |b|.$$

(iii) If $a > 0$ and $b < 0$, then $b < -b$

$$\therefore\ a + b < a + (-b) = |a| + |b|,$$

and $-(a+b) = -a + (-b) < a + (-b) = |a| + |b|.$

From these two, we have $|a+b| < |a| + |b|.$

(iv) In the same way, if $a < 0,\ b > 0$, then

$$|a+b| < |a| + |b|.$$

All cases are covered by (i)—(iv) $\therefore\ |a+b| \leqslant |a| + |b|.$

Exercise: Prove that for real numbers,

$$|a| - |b| \leqslant |a-b|.$$

2.38. We shall close this chapter with just one more theorem.

Theorem 36. (*The Theorem of Archimedes*). *If a and b are any two real positive numbers, there exists a natural number n so as to make $na > b$.*

Proof. Suppose that this property is not true for the given numbers. Therefore for any natural number n whatever, $b \geqslant na$. Hence b is an upper bound for the set of numbers $\{na\}$. By the Axiom, a least upper bound b' exists. Therefore for every n, $b' \geqslant na$ $\therefore b' \geqslant (n+1)\,a$, or $b' - a \geqslant na$. Hence we have obtained for all n, i.e. for the set $\{na\}$, an upper bound smaller than b'. Therefore b' is not the least upper bound,

(ii) $a \leqslant 0, b \leqslant 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ,

$$-a \geqslant 0, \ -b \geqslant 0, \ -(a+b) = (-a) + (-b) \geqslant 0$$

$$\therefore \quad |a+b| = -(a+b) = -a + (-b)$$
$$= |a| + |b|.$$

(iii) $a > 0, b < 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ, $b < -b$

$$\therefore \quad a+b < a + (-b) = |a| + |b|$$

ಮತ್ತು $-(a+b) = -a+(-b) < a+(-b) = |a| + |b|$

ಇವೆರಡರಿಂದ, $|a+b| < |a| + |b|$.

(iv) ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ $a < 0, b > 0$, ಆಗಿದ್ದರೆ,

$$|a+b| < |a| + |b|$$

ಎಲ್ಲ ಸಂದರ್ಭಗಳೂ (i)—(iv) ರಲ್ಲಿ ಸೇರಿವೆ.

$$\therefore \quad |a+b| \leqslant |a| + |b|.$$

ಅಭ್ಯಾಸ :—ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ $||a| - |b|| \leqslant |a-b|$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ,

2.38 ಒಂದೇ ಒಂದು ಪ್ರಮೇಯದಿಂದ ಈ ಅಧ್ಯಾಯವನ್ನು ಮುಕ್ತಾಯ ಗೊಳಿಸುವೆವು.

ಪ್ರಮೇಯ 36. (ಆರ್ಕಿಮಿಡೀಸನ ಪ್ರಮೇಯ). a, b **ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಧನ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದರೆ,** $n a > b$ **ಆಗುವಂತೆ ಒಂದು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ** n **ಇರುತ್ತದೆ.**

ಸಾಧನೆ. ದತ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಈ ಗುಣವಿಲ್ಲದಿರಲಿ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಯಾವುದೇ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ n ಗೂ, $b \geqslant n a$. ಆದ್ದರಿಂದ $\{n a\}$ ಸಂಖ್ಯಾಗಣಕ್ಕೆ, b ಒಂದು ಮೇಲ್ಗಡಿ. ಸ್ವತಸ್ಸಿದ್ಧ ಪ್ರಮಾಣದಂತೆ, ಒಂದು ಕನಿಷ್ಠ ಮೇಲ್ಗಡಿ b' ಇರುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಪ್ರತಿ n ಗೂ, $b' \geqslant n a$.

$\therefore \quad b' \geqslant (n+1) a$, ಅಥವಾ $b' - a \geqslant n a$, ಎಲ್ಲ n ಗೂ, ಎಂದರೆ, $\{n a\}$ ಗಣಕ್ಕೆ, b' ಗಿಂತ ಚಿಕ್ಕದಾದ ಒಂದು ಮೇಲ್ಗಡಿ ದೊರಕಿತು. ಆದ್ದರಿಂದ,

A contradiction thus arises, and hence our assumption that $b' \geqslant na$ for all n is wrong. The theorem is therefore proved.

Archimedes (B. C. 287—212) gave this in geometrical language. Given two segments l and m, we can mark on the second segment m or AB, $AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = \cdots = l$ so that AB can be covered in a suitable number n of steps.



Fig. 2.6

The logical frame of mind of the Greeks who did not accept such facts as intuitively obvious, and who prominently enunciated such a result and tried to prove it, deserves all encomium.

b' ಕನಿಷ್ಠ ಮೇಲ್ಗಡಿಯಾಗಲಿಲ್ಲ. ವಿರೋಧ ಏರ್ಪಟ್ಟಿತಾದ್ದರಿಂದ, ಎಲ್ಲಾ n ಗೂ $b \geqslant n\, a$ ಎಂಬ ನಮ್ಮ ಒಪ್ಪಿಗೆ ತಪ್ಪಾಗುತ್ತದೆ. ಪ್ರಮೇಯವು ಸಾಧಿತವಾಯಿತು.

ಆರ್ಕಿಮಿಡೀಸನು (ಕ್ರಿ. ಪೂ. 287–212) ಇದನ್ನು ರೇಖಾಗಣಿತದ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟನು. ಎರಡು ರೇಖಾಖಂಡ l, m ಗಳು ದತ್ತವಾಗಿದ್ದರೆ, ಎರಡನೆಯ



Fig. 2.6

ರೇಖೆ m ಅಥವಾ AB ಮೇಲೆ, $AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = \cdots = l$ ಆಗುವಂತೆ ಒಂದು ಸೂಕ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಯ n ಹೆಜ್ಜೆಗಳಲ್ಲಿ A B ರೇಖೆಯನ್ನು ಆವರಿಸಬಹುದು.

ಅಂತರ್ಬೋಧೆಗೆ ಸ್ಪಷ್ಟವೆಂದು ಇಂಥ ವಿಷಯಗಳನ್ನು ಒಪ್ಪಿಕೊಳ್ಳದೆ, ಇದಕ್ಕೆ ಮಹತ್ವದ ಹೇಳಿಕೆಯನ್ನು ಕೊಟ್ಟು ಸಮರ್ಥಿಸಲು ಯತ್ನಿಸಿದ ಗ್ರೀಕರ ತಾರ್ಕಿಕ ಮನೋಭಾವಕ್ಕೆ ಮಣಿಯಲೇಬೇಕು.

CHAPTER 3

The Study of Number Systems—continued.

3.1. In this chapter, we shall introduce some fundamental notions of modern algebra. These notions will be illustrated by the number systems given in the previous chapter. But it must be remembered that these notions are applicable not only to number systems, but to other aggregates as well, and have a very wide field of application.

Definition. *Let a, b, c, ... be the elements of a set D. Let us suppose that two operations* called addition and multiplication can be performed on any two elements (which may be different or may be the same) of the set. Let us agree that all the elements of the set obey the following axioms :*

1. $a+b$ and ab *are both elements of* D.

2. $a+b=b+a$. *Commutative law of addition*

3. $a+(b+c)=(a+b)+c$. *Associative law of addition*

4. $a(bc)=(ab)c$. *Associative law of multiplication*

5. $a(b+c)=ab+ac$. (*Left*) *Distributive law of multiplication*

6. $ab=ba$. *Commutative law of multiplication*

---

* These operations need not be the familiar operations associated with these names. They may be any specific operations. But we shall use the usual notations $a+b$ for the addition of a and b, and $a.b$ or ab for multiplication.

ಅಧ್ಯಾಯ 3

ಸಂಖ್ಯಾವ್ಯೂಹಗಳ ಅಧ್ಯಯನ ಮುಂದುವರೆದುದು

3.1. ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ಆಧುನಿಕ ಬೀಜಗಣಿತದ ಕೆಲವು ಮುಖ್ಯ ಭಾವನೆಗಳನ್ನು ಮುಂದಿಡುವೆವು. ಹಿಂದಿನ ಅಧ್ಯಾಯದ ಸಂಖ್ಯಾವ್ಯೂಹಗಳಿಂದ ಈ ಭಾವನೆಗಳನ್ನು ಉದಾಹರಿಸುತ್ತೇವೆ. ಆದರೆ ಈ ಭಾವನೆಗಳು ಸಂಖ್ಯಾವ್ಯೂಹಗಳಿಗೆ ಮಾತ್ರವೇ ಇಲ್ಲದೆ ಇನ್ನೂ ಇತರ ಸಮುದಾಯಗಳಿಗೂ ಪ್ರಯೋಗಿಸಲ್ಪಡಬಹುದಾಗಿ, ಬಹಳ ವಿಸ್ತಾರವಾದ ಕ್ಷೇತ್ರವನ್ನವಲಂಬಿಸಿರುತ್ತವೆ.

ವ್ಯಾಖ್ಯೆ. ಒಂದು ಗಣ D ಯ ಅಂಶಗಳು a, b, c, ... ಆಗಿರಲಿ. ಯಾವ ಎರಡು (ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಅಥವಾ ಒಂದೇ ಆದ) ಅಂಶಗಳ ಮೇಲೆ ಸಂಕಲನ ಮತ್ತು ಗುಣಾಕಾರ ಎಂಬ ಎರಡು ಕ್ರಿಯೆಗಳನ್ನು* ಮಾಡಲು ಸಾಧ್ಯವೆಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. ಗಣಾಂಶಗಳೆಲ್ಲವೂ ಕೆಳಗಿನ ಸ್ವತಸ್ಸಿದ್ಧ ಪ್ರಮಾಣಗಳಿಗೆ ವಿಧೇಯವಾಗಿವೆ ಎಂದು ಒಪ್ಪಿಕೊಳ್ಳೋಣ.

1. $a + b$ **ಮತ್ತು** ab — **ಎರಡೂ Dಯ ಅಂಶಗಳು**
2. $a + b = b + a$ — **ಸಂಕಲನದ ಪರಿವರ್ತನೆ**
3. $a + (b + c) = (a + b) + c$ — **ಸಂಕಲನದ ಸಹವರ್ತನೆ**
4. $a(bc) = (ab)c$ — **ಗುಣಾಕಾರದ ಸಹವರ್ತನೆ**
5. $a(b + c) = ab + ac$. — **ಗುಣಾಕಾರದ (ಎಡ) ವಿಭಾಜಕ ನಿಯಮ**
6. $ab = ba$ — **ಗುಣಾಕಾರದ ಪರಿವರ್ತನೆ**

---

* ಈ ಕ್ರಿಯೆಗಳು ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಳಕೆಯಲ್ಲಿರುವ ಕ್ರಿಯೆಗಳೇ ಆಗಿರಬೇಕಾಗಿಲ್ಲ. ಯಾವುದೋ ಖಚಿತ ರೂಪದ ಕ್ರಿಯೆಗಳಾಗಿರಬಹುದು. ಆದರೆ, ಸಾಮಾನ್ಯ ಸಂಕೇತಗಳನ್ನೇ ಉಪಯೋಗಿಸಿ, a, b ಗಳ ಸಂಕಲನಕ್ಕೆ $a + b$ ಎಂದೂ ಗುಣಾಕಾರಕ್ಕೆ $a.b$ ಅಥವಾ ab ಎಂದೂ ಬರೆಯುವೆವು.

7. *There exists an element 0 in D such that for any $a \in D$, $a+0=a$. This element can be called zero. It will also be called as the identity element of addition.*

8. *There exists an element 1 in D. $1 \neq 0$, such that for any $a \in D$, $a \cdot 1=a$. This element is the identity element of multiplication.*

9. *For any element $a \in D$, there exists an element x in D such that $a+x=0$. This is the additive inverse.*

10. *If $ca=cb$, $c \neq 0$, then $a=b$. Cancellation law.*

11. *For any $a \neq 0$, $a \in D$, there exists in D an element a^{-1} such that $a^{-1}\,a=1$. a^{-1} will be called the inverse of a.*

A set whose elements satisfy these eleven axioms is called a *field.* A set whose elements satisfy the first ten axioms only is called an *integral domain.*

A set whose elements satisfy the axioms 1, 2, 3, 4, 5, 7, 9 and also the right distributive law $(a+b)\,c=ac+bc$ is called a *ring*. A ring need not contain the element 1 and the inverse elements. If in addition to the above, the commutative law $ab=ba$ holds, the ring is called a *commutative ring*. In this case, the right distributive law automatically follows from the other properties.

3.2. **Examples.**

(1) R, the set of real numbers is a field. We have seen in the previous chapter that all the above eleven properties hold good. In addition, they also possess the property of being ordered.

7. ಯಾವುದೇ $a \in D$ಗೆ, $a + 0 = a$ ಆಗುವಹಾಗೆ, 0 ಎಂಬ ಒಂದು ಅಂಶವು Dನಲ್ಲಿದೆ. ಈ ಅಂಶವನ್ನು ಸೊನ್ನೆ ಎಂದು ಕರೆಯ ಬಹುದು. ಇದನ್ನು ಸಂಕಲನದ ಏಕ ಎಂದೂ ಕರೆಯುವೆವು.

8. ಯಾವುದೇ $a \in D$ಗೆ, $a \cdot 1 = a$, $1 \neq 0$ ಆಗುವ ಹಾಗೆ 1 ಎಂಬ ಅಂಶವು D ನಲ್ಲಿದೆ. ಈ ಅಂಶವು ಗುಣಾಕಾರದ ಏಕ.

9. ಯಾವುದೇ ಅಂಶ $a \in D$ ಗೆ, $a + x = 0$ ಆಗುವ ಹಾಗೆ D ನಲ್ಲಿ x ಎಂಬ ಅಂಶವಿದೆ. ಇದು ಸಂಕಲನದ ವಿಲೋಮ.

10. $ca = cb$, $c \neq 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ, $a = b$. ನಿರಸನನಿಯಮ.

11. ಯಾವುದೇ $a \neq 0$, $a \in D$ ಗೆ, $a^{-1}a = 1$ ಆಗುವಹಾಗೆ a^{-1} ಎಂಬ ಅಂಶ D ನಲ್ಲಿದೆ. a^{-1} ಅಂಶವನ್ನು a ಯ ಪ್ರತಿಲೋಮ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಈ ಹನ್ನೊಂದು ಸ್ವತಸ್ಸಿದ್ಧ ಪ್ರಮಾಣಗಳನ್ನು ಸರಿದೂಗುವ ಅಂಶಗಳ ಗಣವನ್ನು ಕ್ಷೇತ್ರ ಎಂದು ಕರೆಯುವೆವು. ಕಡೆಯದಾದ 11ನೆಯ ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು ಬಿಟ್ಟು ಮೊದಲಿನ ಹತ್ತು ಪ್ರಮಾಣಗಳನ್ನು ಸರಿದೂಗುವ ಅಂಶಗಳ ಗಣವನ್ನು ಪೂರ್ಣಾಂಕಮುಖಪ್ರಾಂತ, ಅಥವಾ ಸಂಕ್ಷೇಪವಾಗಿ ಅಂಕಮುಖಪ್ರಾಂತ ಎಂದು ಕರೆಯುವೆವು.

ಮೇಲಿನ 1, 2, 3, 4, 5, 7, 9ನೆಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳು ಮತ್ತು ಬಲವಿಭಾಜಕ ನಿಯಮವಾದ $(a + b)c = ac + bc$, ಇಷ್ಟು ಗುಣಗಳುಳ್ಳ ಅಂಶಗಳ ಗಣಕ್ಕೆ ವಲಯ ಎಂದು ಹೆಸರು. ವಲಯದಲ್ಲಿ 1 ಎಂಬ ಅಂಶವೂ ಪ್ರತಿಲೋಮಗಳೂ ಇರಬೇಕಾದ್ದಿಲ್ಲ. ಇವುಗಳ ಜೊತೆಗೆ $ab = ba$ ಎಂಬ ಪರಿವರ್ತನಾ ಗುಣವಿದ್ದರೆ, ವಲಯವು ಪರಿವರ್ತಕ ವಲಯ ಎನ್ನಿಸಿಕೊಳ್ಳುತ್ತದೆ. ಆಗ ಬಲ ವಿಭಾಜಕ ನಿಯಮವು ಇತರ ಗುಣಗಳಿಂದ ತಾನಾಗಿಯೇ ಉಂಟಾಗುತ್ತದೆ.

3.2. ಉದಾಹರಣೆಗಳು :

(1) ವಾಸ್ತವಸಂಖ್ಯಾಗಣ (R) ಕ್ಷೇತ್ರವಾಗುತ್ತದೆ. ಮೇಲಿನ ಹನ್ನೊಂದು ಗುಣಗಳೂ ನಿಜವೆಂದು ಹಿಂದಿನ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ತಿಳಿದಿದ್ದೇವೆ. ಇವುಗಳ ಜೊತೆಗೆ ಕ್ರಮ ಎಂಬ ಭಾವನೆಯನ್ನೂ ಪಡೆದಿರುವುದರಿಂದ,

The set of real numbers is an ordered field.

(2) J, the set of integers is an integral domain. With the exception of 1 and –1, no integer possesses an inverse which is a member of the set (i.e. which is also an integer). Therefore, all the axioms hold good, with the exception of axiom 11.

(3) Q, the set of rational numbers is a field. All the eleven properties which characterize a field are seen to be true, if according to the laws governing rational numbers discussed in Part 3 of Chapter 2, we agree to call 0/1 as the "zero" of Q, and 1/1 as its "one." That 0/1 is equal to the integer 0 and 1/1 is equal to the integer 1 can be obtained only by using the concept of isomorphism (see chapter 2, Theorem 32).

(4) A certain set has only two elements 0 and 1. Addition is defined by $0+0=0$, $0+1=1$, and $1+1=1$* (not 2, the set does not have the element 2) and multiplication by $0\cdot 0=0$, $0\cdot 1=0$, $1\cdot 1=1$. This set is an integral domain.

(5) If a, b are integers, then the set of all numbers of the form $a+b\sqrt{3}$ is an integral domain.

It is readily seen that the first nine axioms hold good for this set. Thus,

$$(a+b\sqrt{3})+(c+d\sqrt{3})=(a+c)+(b+d)\sqrt{3}.$$

$$(a+b\sqrt{3})(c+d\sqrt{3})=(ac+3bd)+(ad+bc)\sqrt{3}$$

$$0=0+1\sqrt{3}, \qquad 1=1+0\sqrt{3}.$$

* This should not be considered as an artificial and meaningless example. We can conceive of a mathematics containing "voidness" or "emptiness" denoted by "0" and "fullness", denoted by 1, with other elements between these. Fullness added to fullness results in fullness only, symbolically $1+1=1$. Such mathematics is called Boolean algebra, and has applications in technical subjects like electrical engineering.

ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯಾಗಣವು ಒಂದು ಕ್ರಮಯುಕ್ತ ಕ್ಷೇತ್ರ.

(2) ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಣ (J), ಅಂಕಮುಖಪ್ರಾಂತ, 1 ಮತ್ತು —1ನ್ನು ಹೊರತು ಯಾವುದೇ ಪೂರ್ಣಾಂಕಕ್ಕೆ ಆ ಗಣವಲ್ಲೇ ಇರುವ (ಎಂದರೆ ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾದ) ಪ್ರತಿಲೋಮ ಇರುವುದಿಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಮೇಲಿನ 11ನೆಯ ಪ್ರಮಾಣದ ಹೊರತು, ಉಳಿದೆಲ್ಲವೂ ನಿಜವಿರುತ್ತವೆ.

(3) ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣ (Q), ಕ್ಷೇತ್ರ.

ಅಧ್ಯಾಯ 2, ಭಾಗ 3ರಲ್ಲಿ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕುರಿತು ಹೇಳಿರುವ ನಿಯಮಗಳ ಪ್ರಕಾರ, 0/1 ಎಂಬುದನ್ನು Q ಗಣದ "ಸೊನ್ನೆ" ಎಂದೂ 1/1 ಎಂಬುದನ್ನು "ಒಂದು" ಎಂದೂ ಕರೆಯುವುದಾದರೆ, ಕ್ಷೇತ್ರಕ್ಕೆ ಆವಶ್ಯಕವಾದ ಹನ್ನೊಂದು ಗುಣಗಳೂ ನಿಜವಿರುವುದು ಕಂಡುಬರುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯಾಗಣ Q ಒಂದು ಕ್ಷೇತ್ರ. $0/1=0$ ಎಂಬ ಪೂರ್ಣಾಂಕ, $1/1=1$ ಎಂಬ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಎಂಬುದನ್ನು ಸಮಾನುಕ್ರಮಣದ ಭಾವನೆಯಿಂದ ಮಾತ್ರ ತಿಳಿಯಬಹುದು. (ಅಧ್ಯಾಯ 2, ಪ್ರಮೇಯ 32 ನೋಡಿ.)

(4) ಒಂದು ಗಣದಲ್ಲಿ 0 ಮತ್ತು 1 ಇವೆರಡೇ ಅಂಶಗಳಿವೆ. ಸಂಕಲನ ಕ್ರಮವು $0+0=0$, $0+1=1$, ಆದರೆ $1+1=1$ (2 ಅಲ್ಲ, ಗಣದಲ್ಲಿ 2 ಎಂಬ ಅಂಶವೇ ಇಲ್ಲ) ಎಂದೂ *ಗುಣಾಕಾರವು $0.0=0$, $0.1=0$, $1.1=1$ ಎಂದೂ ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಲ್ಪಟ್ಟರೆ, ಈ ಗಣವು ಒಂದು ಅಂಕಮುಖಪ್ರಾಂತ.

(5) a, b ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು. $a+b\sqrt{3}$ ಎಂಬ ರೂಪದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣ ಒಂದು ಅಂಕಮುಖಪ್ರಾಂತ.

ಮೊದಲನೆಯ ಒಂಬತ್ತು ಪ್ರಮಾಣಗಳು ಈ ಗಣಕ್ಕೆ ಅನ್ವಯಿಸುತ್ತವೆ ಎಂದು ಸುಲಭವಾಗಿ ನೋಡಬಹುದು.

ಹೇಗೆಂದರೆ, $(a+b\sqrt{3})+(c+d\sqrt{3})=(a+c)+(b+d)\sqrt{3}$.

$$(a+b\sqrt{3})\,(c+d\sqrt{3})=(ac+3\,bd)+(ad+bc)\sqrt{3}.$$

$$0=0+1\sqrt{3},\quad 1=1+0\sqrt{3}$$

* ಇದು ಕೇವಲ ಕೃತಕ, ಅರ್ಥವಿಲ್ಲದ ಉದಾಹರಣೆ ಎಂದು ತಿಳಿಯಬಾರದು. "ಶೂನ್ಯ" 0, "ಪೂರ್ಣ" 1 ಎಂಬ ಅಂಶಗಳ ನಡುವೆ ಇತರ ಅಂಶಗಳಿರುವ ಒಂದು ಗಣಿತವನ್ನು ಭಾವಿಸಬಹುದು. ಪೂರ್ಣಕ್ಕೆ ಪೂರ್ಣ ಸೇರಿಸಿದರೆ, ಪೂರ್ಣವೇ ಒದಗುತ್ತದೆ, ಸಂಕೇತದಲ್ಲಿ $1+1=1$. ಇಂಥ ಗಣಿತಕ್ಕೆ ಬೂಲಿಯನ್ ಬೀಜಗಣಿತ ಎಂದು ಹೆಸರು. ಎಲೆಕ್ಟ್ರಿಕಲ್ ಇಂಜನಿಯರಿಂಗ್ ಮುಂತಾದ ತಾಂತ್ರಿಕ ವಿದ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಇದರ ಅವಶ್ಯಕತೆ ಇದೆ.

If $(a+b\sqrt{3})+x=0$, then $x=-a-b\sqrt{3}$.

Finally, to prove axiom 10, we shall write this cancellation law in another form.

Theorem 1. *If* $\alpha\beta=0$, *then either* $\alpha=0$ *or* $\beta=0$.

For, if $\alpha\neq 0$, $\alpha\cdot\beta=0$ (hypothesis)

$$=\alpha\cdot 0.$$

$\therefore$ By cancellation $\beta=0$.

Conversely, if $ab=ac$, $(a\neq 0)$,

$$a(b-c)=ab-ac$$
$$=0.$$

($-c$ is the additive inverse of c).

Since $a\neq 0$, $b-c=0$ or $b=c$.

This theorem can be expressed by saying that in an integral domain, zero has no factors.

Let now $(c+d\sqrt{3})(a+b\sqrt{3})=(c+d\sqrt{3})(a'+b'\sqrt{3})$

$\therefore (c+d\sqrt{3})\ [(a-a')+(b-b')\sqrt{3}]=0.$

$\therefore$ If c, d are not zero, $(a-a')+(b-b')\sqrt{3}=0$,
by Theorem 1.

a, b, a', b' are integers. $\therefore a-a'=0$, $b-b'=0$

$\therefore a+b\sqrt{3}=a'+b'\sqrt{3}$.

Examples 4 and 5 point out that the concepts of integral domain and field are applicable not only to the number systems discussed in the previous chapter, but also to more complicated sets. The student will come across this fundamental concept at length in higher mathematics.

Exercises 3.1

1 The set of even integers is not an integral domain. It may be called a ring, if 0 is treated as an even integer.

$(a+b\sqrt{3})+x=0$ ಆದರೆ, $x=-a-b\sqrt{3}$.
ಕಡೆಯದಾಗಿ, 10ನೆಯ ಪ್ರಮಾಣ ನಿಜವಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಲು, ಈ ನಿರಸನ ನಿಯಮವನ್ನು ಬೇರೊಂದು ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯುವೆವು.

ಪ್ರಮೇಯ 1. $\alpha\beta=0$ **ಆದರೆ,** $\alpha=0$ **ಅಥವಾ** $\beta=0$ **ಆಗಲೇಬೇಕು.** ಏಕೆಂದರೆ, $\alpha\neq 0$ ಎಂದು ಭಾವಿಸಿದರೆ, $\alpha.\beta=0$ (ದತ್ತ)

$$=\alpha\cdot 0$$

$\therefore$ ನಿರಸನದಿಂದ $\beta=0$.

ವಿಲೋಮವಾಗಿ, $ab=ac$ ಆದರೆ, $(a\neq 0)$

$$a(b-c)=ab-ac$$
$$=0$$

[$-c$ ಎಂಬುದು cಯ ಸಂಕಲನದ ವಿಲೋಮ]

$a\neq 0$ ಆದ್ದರಿಂದ, $b-c=0$ ಅಥವಾ $b=c$.

ಈ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು, ಅಂಕಮುಖಪ್ರಾಂತದಲ್ಲಿ ಸೊನ್ನೆಗೆ ಭಾಜಕ (ಅಪವರ್ತನ) ಗಳಿಲ್ಲ ಎಂಬ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಉಲ್ಲೇಖಿಸಬಹುದು.

ಈಗ $(c+d\sqrt{3})(a+b\sqrt{3})=(c+d\sqrt{3})(a'+b'\sqrt{3})$ ಆಗಿರಲಿ.

$\therefore\quad (c+d\sqrt{3})[(a-a')+(b-b')\sqrt{3}]=0$

c, d ಸೊನ್ನೆ ಅಲ್ಲದಿದ್ದರೆ, ಪ್ರಮೇಯ 1 ರಂತೆ, $(a-a')+(b-b')\sqrt{3}=0$
a, b, a', b' ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು

$\therefore\quad a-a'=0,\ b-b'=0.$

$\therefore\quad a+b\sqrt{3}=a'+b'\sqrt{3}$.

4 ಮತ್ತು 5ನೆಯ ಉದಾಹರಣೆಗಳಿಂದ, "ಅಂಕಮುಖಪ್ರಾಂತ," ಹೀಗೆಯೇ "ಕ್ಷೇತ್ರ" ಎಂಬ ಭಾವನೆ ಹಿಂದಿನ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ನಿರೂಪಿತವಾಗಿರುವ ಸಂಖ್ಯಾ ವ್ಯೂಹಗಳಿಗೆ ಮಾತ್ರವಲ್ಲದೆ, ಇನ್ನೂ ಇತರ ತೊಡಕಾದ ಗಣಗಳಿಗೂ ಅನ್ವಯಿಸಬಹುದೆಂಬುದಾಗಿ ಸೂಚನೆ ಕಂಡುಬರುತ್ತದೆ. ವಿಸ್ತಾರವಾದ ಈ ಗಣಿತ ಭಾವನೆಯನ್ನು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯು ಪ್ರೌಢಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಕಂಡುಕೊಳ್ಳುವನು.

ಅಭ್ಯಾಸ 3.1

1 ಸಮಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗಣವು ಅಂಕಮುಖಪ್ರಾಂತವಲ್ಲ, 0ನ್ನು ಸಮವೆಂದು ಭಾವಿಸಿದರೆ, ವಲಯವಾಗುತ್ತದೆ.

2 The set of odd integers is not a ring.

3 The set of positive integers is not a ring.

4 Is the set $2^1, 2^2, 2^3, 2^4 \ldots$ an integral domain, or a ring

5 If the left distributive law and commutative property of multiplication (axioms 5, 6) hold, prove that the right distributive law also holds.

6 Prove that in a field—

(1) $(bd)^{-1} = d^{-1}\, b^{-1}$

(2) $(-a)^{-1} = -(a^{-1})$

(3) $(a/b)/c = a/bc$

(4) $(-a)/(-b) = a/b.$

7 If in an ordered set $a^5 = b^5$, prove that $a = b$.
[Suppose $a = b+k$, etc....].

3.3. Properties of a field

Theorem 2. *If a and b are two elements of a field F, and $a \neq 0$, the equation $ax=b$ has one and only one solution x.*

Proof. $x=a^{-1}b$ is the required solution, for

$$a(a^{-1}b)=(a^{-1}a)\, b=b$$

To show that this is the only solution, suppose that y is another solution.

$\therefore\ ax=ay=b.$ By the Cancellation law, $x=y$.

This solution will be written hereafter as $x = b/a$ or $\frac{b}{a}$.

If we call this as the operation of dividing b by a, Theorem 2 can be enunciated as follows:

2 ವಿಷಮ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗಣವು ವಲಯ ಅಲ್ಲ.

3 ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗಣವು ವಲಯವಲ್ಲ.

4 $2^1, 2^2, 2^3, 2^4, \ldots$ ಎಂಬ ಗಣ ಅಂಕಮುಖಿಪ್ರಾಂತವೇ, ವಲಯವೇ ?

5 ಗುಣಾಕಾರದ ಎಡವಿಭಾಜಕ ನಿಯಮವೂ ಪರಿವರ್ತನೆಯೂ (ಪ್ರಮಾಣ 5, 6) ನಿಜವಿದ್ದರೆ, ಬಲವಿಭಾಜಕ ನಿಯಮವೂ ನಿಜವೆಂದು ತೋರಿಸಿ.

6. ಕ್ಷೇತ್ರದಲ್ಲಿ

(1) $(bd)^{-1} = d^{-1} b^{-1}$

(2) $(-a)^{-1} = -(a^{-1})$

(3) $(a/b)\Big/ c = a/bc$

(4) $(-a)\Big/(-b) = a/b$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

7. ಕ್ರಮಯುಕ್ತವಾದ ಗಣದಲ್ಲಿ $a^5 = b^5$ ಆದರೆ, $a = b$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ,

[$a = b + k$ ಆಗಿರಲಿ, ...]

3.3, ಕ್ಷೇತ್ರದ ಗುಣಗಳು.

ಪ್ರಮೇಯ 2. ಒಂದು ಕ್ಷೇತ್ರ F ನ ಎರಡು ಅಂಶಗಳು a, b ಆದರೆ, ಮತ್ತು $a \neq 0$ ಆದರೆ, $ax = b$ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಒಂದು, ಒಂದೇ ಒಂದು ಮೂಲ x ದೊರೆಯುತ್ತದೆ.

ಸಾಧನೆ. $x = a^{-1} b$ ಎಂಬುದೇ ಬೇಕಾದ ಮೂಲ. ಹೇಗೆಂದರೆ $a(a^{-1} b) = (a^{-1} a) b = b$.

ಇದು ಒಂದೇ ಮೂಲ ಎಂದು ತೋರಿಸಲು, ಇನ್ನೊಂದು ಮೂಲ y ಇರಲಿ.

$\therefore\ ax = ay = b$. ನಿರಸನ ನಿಯಮದಿಂದ, $x = y$.

ಈ ಮೂಲವನ್ನು ಇನ್ನು ಮುಂದೆ $x = b/a$ ಅಥವಾ $\dfrac{b}{a}$ ಎಂದು ಬರೆಯುವೆವು. b ಯನ್ನು a ಇಂದ ಭಾಗಿಸುವ ಕ್ರಿಯೆ ಎಂದು ಇದನ್ನು ಕರೆದರೆ, ಪ್ರಮೇಯ 2ನ್ನು ಹೀಗೆ ನಿರೂಪಿಸಬಹುದು.

In a field, division is possible by any non - zero element in one and only one way.

Theorem 3. *The following laws hold good for the elements of a field.* $(b \neq 0, d \neq 0)$

(i) *If* $a/b = c/d$ *and only then,* $ad = bc$

(ii) $a/b + c/d = (ad+bc)/bd$

(iii) $(a/b)(c/d) = ac/bd$

(iv) $a/b + (-a/b) = 0$

(v) $(a/b)(b/a) = 1$, *when* $a \neq 0$.

We have worked out these laws for rational numbers, when a, b, c, d, are integers. We have taken the first three as definitions and proved the rest (§§ 2.20 – 2 22). We are now giving these for the elements of any field. In particular, they are true for the special case of real numbers.

Proof: $a/b = c/d$ means that $ab^{-1} = cd^{-1}$

$$\therefore\ ad = a(b^{-1}b)d = cd^{-1}(bd) = cd^{-1}(db) = bc.$$

Conversely, if $ad = bc$, then $a/b = b^{-1}a = b^{-1}add^{-1} = b^{-1}bcd^{-1}$

$$= cd^{-1} = c/d.$$

(ii) By Theorem 2, $x = a/b$ is the solution of the equation $bx = a$, and $y = c/d$ is the solution of the equation $dy = c$.

$$\therefore\ dbx = da$$

$$bdy = bc$$

$$\therefore\ bd(x+y) = ad + bc$$

$\therefore\ x + y = (ad + bc)/bd$ is the solution of $bdt = ad + bc$

$$\therefore\ a/b + c/d = (ad + bc)/bd$$

ಕ್ಷೇತ್ರದಲ್ಲಿ, 0 ಅಲ್ಲದ ಅಂಶದಿಂದ ಭಾಗಹಾರ ಕ್ರಿಯೆಯು ಸಾಧ್ಯ, ಒಂದೇ ವಿಧದಲ್ಲಿ ಸಾಧ್ಯ.

ಪ್ರಮೇಯ 3. **ಕ್ಷೇತ್ರದ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಕುರಿತು, ಕೆಳಗಿನ ನಿಯಮಗಳು ನಿಜವಿರುತ್ತವೆ.** ($b\neq 0$, $a\neq 0$).

(i) $a/b = c/d$ ಆದರೆ, ಆದರೆ ಮಾತ್ರ, $ad=bc$.

(ii) $a/b + c/d = (ad + bc)/bd$

(iii) $(a/b)\cdot(c/d) = ac/bd$

(iv) $a/b + (-a/b) = 0$

(v) $(a/b)(b/a) = 1$, $a\neq 0$ ಆದಾಗ

a, b, c, d. ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಾದಾಗ, ಈ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುತ್ತೇವೆ. ಮೊದಲ ಮೂರನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯೆಗಳಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು, ಉಳಿದುವನ್ನು ಸಾಧಿಸಿದ್ದೇವೆ. (§§ 2.20–2.22). ಇಲ್ಲಿ ಇವನ್ನು ಯಾವುದೇ ಕ್ಷೇತ್ರದ ಅಂಶಗಳಿಗೆ ಕೊಡುವೆವು. ವಿಶೇಷ ಸಂದರ್ಭವಾದ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ, ಈ ನಿಯಮಗಳು ನಿಜವಿರುತ್ತವೆ.

ಸಾಧನೆ : (i) $a/b = c/d$ ಎಂದರೆ $ab^{-1} = cd^{-1}$

$\therefore ad = a(b^{-1}b)d = cd^{-1}(bd) = cd^{-1}db = bc$.

ವಿಲೋಮವಾಗಿ, $ad=bc$ ಆದರೆ $a/b=b^{-1}a=b^{-1}add^{-1}= b^{-1}bcd^{-1} = cd^{-1} = c/d$.

(ii) ಪ್ರಮೇಯ 2 ರಂತೆ. $bx=a$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲ $x=a/b$; $dy=c$ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲ $y=c/d$.

$\therefore\ dbx=da$

$bdy=bc$.

$\therefore\ bd(x+y)=ad+bc$

$\therefore\ x+y=(ad+bc)/bd$ ಎಂಬುದು $bdt=ad+bc$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲ.

$$\therefore\ a/b+c/d=(ad+bc)/bd$$

Similarly $a/b - c/d = \dfrac{ad-bc}{bd}$

(iii) Form the equations $bx = a$ and $dy = c$ of (ii),

$$(bx)(dy) = ac$$

$$\therefore \quad (bd)(xy) = ac \qquad \therefore \quad xy = ac/bd$$

(iv) From (ii), $a/b + (-a/b) = \dfrac{ab-ba}{b^2} = 0/b^2$

$$= 0\cdot(b^2)^{-1} = 0$$

(v) From (iii), $a/b \cdot b/a = ab/ba$

ab/ba is the solution of the equation $(ba)\,x = ab$. But it is evident that $x = 1$ is a solution of this equation. The solution being unique, it follows that $ab/ba = 1$.

3.4. *Sub-field*: If a subset S of a field F possesses all the properties of a field, it is called a sub-field of F. This means that (i) addition and multiplication of any two elements of S must give elements of S, (ii) the " negative " (additive inverse $-a$) of any element a in S as also the inverse a^{-1} must be in S.

If the subset S possesses the properties (i) and (ii), we can show that it possesses all the remaining properties of a field. As an example, we shall show that S possesses the identity elemets of addition and of multiplication.

By (i), if $a, b \in S$, $a + b \in S$. By (ii), $-a \in S$.

$\therefore$ Taking $b = -a$, $\quad a + (-a) \in S$.

But $a + (-a) = 0 \quad \therefore 0 \in S$.

Also this 0 serves as the identity element of addition in S as well as in F. By its uniqueness, it forms the unique identity element of addition in S also.

Similarly, if $0 \neq a \in S$, we have by (ii), $a^{-1} \in S$. By (i), for any a and b in S, $a\cdot b \in S$. Taking $b = a^{-1}$, $a\cdot a^{-1} \in S$. But $a\cdot a^{-1} = 1 \quad \therefore 1 \in S$. On account of its uniqueness, it is also the unique identity element of multiplication in S also.

ಹೀಗೆಯೇ $a/b - c/d = \dfrac{ad-bc}{bd}$

(iii) (ii) ರಲ್ಲಿರುವ $bx=a$ ಮತ್ತು $dy=c$ ಸಮೀಕರಣಗಳಿಂದ

$$(bx)(dy) = ac$$

$$\therefore (bd)(xy) = ac \quad \therefore \; xy = ac/bd$$

(iv) (ii) ರಿಂದ, $a/b+(-a/b) = \dfrac{ab-ba}{b^2} = 0/b^2$

$$= 0.(b^2)^{-1} = 0.$$

(v) (iii) ರಿಂದ, $(a/b)\cdot(b/a) = ab/ba$

ab/ba ಎಂಬುದು $(ba)x = ab$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲ. $x=1$ ಇದಕ್ಕೆ ಮೂಲವೆಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟ. ಮೂಲವು ಏಕೈಕವಾದ್ದರಿಂದ, $ab/ba = 1$.

3.4 ಉಪಕ್ಷೇತ್ರ. ಒಂದು ಕ್ಷೇತ್ರ F ನ ಉಪಗಣ S ಗೆ ಕ್ಷೇತ್ರದಗುಣಗಳೆಲ್ಲಾ ಇದ್ದರೆ ಅದು F ನ ಉಪಕ್ಷೇತ್ರವೆನ್ನಿಸುವುದು. ಎಂದರೆ, (i) S ನ ಎರಡು ಅಂಶಗಳ ಸಂಕಲನವೂ ಗುಣಾಕಾರವೂ S ನ ಅಂಶಗಳನ್ನೇ ಒದಗಿಸಬೇಕು. (ii) S ನ ಯಾವುದೇ ಅಂಶ a ದ "ಋಣವೂ" (ಸಂಕಲನ ವಿಲೋಮ-a) ಪ್ರತಿಲೋಮ (a^{-1}) ವೂ S ನಲ್ಲಿಯೇ ಇರಬೇಕು.

S ಎಂಬ ಉಪಗಣವು (i) ಮತ್ತು (ii) ನೆಯ ಗುಣಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದರೆ, ಅದಕ್ಕೆ ಕ್ಷೇತ್ರದ ಉಳಿದ ಎಲ್ಲಾ ಗುಣಗಳೂ ಇರುತ್ತವೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ S ನಲ್ಲಿ ಸಂಕಲನದ ಮತ್ತು ಗುಣಾಕಾರದ ಏಕಗಳಿರುತ್ತವೆಯೆಂದು ತೋರಿಸುವೆವು.

ಈಗ (i) ರಿಂದ $a, b \in S$ ಆದರೆ, $a+b \in S$, ಮತ್ತು (ii) ರಿಂದ $-a \in S$. $b = -a$ ಎಂದಿಟ್ಟರೆ, $a+(-a) \in S$.

ಆದರೆ $a+(-a) = 0$

$\therefore 0 \in S$. ಮತ್ತು ಈ 0 ಯು F ನಲ್ಲಿ ಹೇಗೋ S ನಲ್ಲೂ ಸಂಕಲನದ ಏಕವಾಗಿ ವ್ಯವಹರಿಸುತ್ತದೆ. ಇದರ ಏಕೈಕತೆಯಿಂದ S ನಲ್ಲಿ 0 ಯೇ ಏಕಮಾತ್ರವಾದ ಸಂಕಲನದ ಏಕವೆಂದು ವೇದ್ಯವಾಗುತ್ತದೆ.

ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ, $0 \neq a \in S$ ಆದರೆ, (ii) ರ ಪ್ರಕಾರ $a^{-1} \in S$. (i) ರ ಪ್ರಕಾರ S ನಲ್ಲಿರುವ ಯಾವ a, b ಗಳಿಗೂ $a \cdot b \in S$. $b = a^{-1}$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, $a \cdot a^{-1} \in S$. ಆದರೆ $a \cdot a^{-1} = 1$

$\therefore 1 \in S$. ಇದರ ಏಕೈಕತೆಯಿಂದ 1 ಎಂಬುದೇ S ನಲ್ಲೂ ಸಹ ಗುಣಾಕಾರದ ಏಕವಾಗಿ ವ್ಯಹರಿಸುತ್ತದೆ.

The other properties can be established similarly.

Example. As explained in 3.2, the set R of real numbers is a field. Let us now consider the subset.

$$S = \{ a + b\sqrt{3} ; a, b \text{ are rational numbers} \}$$

If $a + b\sqrt{\ }$ and $c + d\sqrt{3}$ are two elements of S,

$$(a+b\sqrt{3}) + (c+d\sqrt{3}) = (a+c) + (b+d)\sqrt{3} \in S.$$

$$(a+b\sqrt{3}) \cdot (c+d\sqrt{3}) = (ac+3bd) + (bc+ad)\sqrt{3} \in S.$$

$\therefore$ The subset S is closed with respect to addition and multiplication. (1)

The negative or additive inverse of $a+b\sqrt{3}$ is $-(a+b\sqrt{3})$, which can be written $(-a)+(-b)\sqrt{3}$. Since $-a$ and $-b$ are rational, $(-a) + (-b)\sqrt{3} \in S$.

Similarly, if $0 \neq a+b\sqrt{3}$, *i. e.* if $a \neq 0$, $b \neq 0$,

$$\frac{1}{a+b\sqrt{3}} = \frac{1}{a+b\sqrt{3}} \cdot \frac{a-b\sqrt{3}}{a-b\sqrt{3}} = \left(\frac{a}{a^2-3b^2}\right) + \left(\frac{-b}{a^2-3b^2}\right)\sqrt{3}$$

Now, since $\sqrt{3}$ is not a rational number, $a^2-3b^2 \neq 0$

$\therefore \frac{1}{a+b\sqrt{3}} \in S$, and this forms the multiplicative inverse of $a+b\sqrt{3}$. (2)

By (1) and (2), S is a subfield of R.

The identity elements of addition and multiplication are $0 = 0 + 0\sqrt{3}$ and $1 = 1 + 0\sqrt{3}$.

3.5. We close this chapter, by working out as an exercise a theorem which depends on the concept of well-ordering explained in the previous chapter.

ಉಳಿದ ನಿಯಮಗಳನ್ನೂ ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲೇ ಸ್ಥಿರಪಡಿಸಿಕೊಳ್ಳಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆ

3.2 ರಲ್ಲಿ ಸೂಚಕವಾಗಿರುವಂತೆ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣವಾದ R ಎಂಬುದು ಒಂದು ಕ್ಷೇತ್ರವೆಂಬುದೇನೋ ಸರಿ.

$S = \{a + b\sqrt{3};\ a, b$ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು$\}$ ಎಂಬ R ನ ಉಪಗಣವೊಂದನ್ನು ಕುರಿತು ವಿಚಾರಮಾಡೋಣ.

S ಗೆ ಸೇರಿದ $a+b\sqrt{3}$ ಮತ್ತು $c+d\sqrt{3}$ ಎಂಬ ಅಂಶಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, $(a+b\sqrt{3}) + (c+d\sqrt{3}) = (a+c) + (b+d)\sqrt{3} \in S$
$(a+b\sqrt{3}).(c+d\sqrt{3}) = (ac+3bd) + (bc+ad)\sqrt{3} \in S$

$\therefore$ S ಉಪಗಣವು ಸಂಕಲನ ಮತ್ತು ಗುಣಾಕಾರ ಕ್ರಿಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಆವೃತವಾಗಿವೆ (1) $a+b\sqrt{3}$ ಅಂಶದ ಋಣವಾದ (ಸಂಕಲನದ ಪ್ರತಿಲೋಮ) $-(a+b\sqrt{3})$ ಯನ್ನು $(-a) + (-b)\sqrt{3}$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. ಇಲ್ಲಿ $(-a)$ ಮತ್ತು $(-b)$ ಗಳೂ ಭಾಗಲಬ್ಧಗಳಾಗಿರುವುದರಿಂದ, $(-a)+(-b)\sqrt{3} \in S$.

ಹಾಗೆಯೇ $0 \neq a+b\sqrt{3}$, ಎಂದರೆ $a \neq 0$, $b \neq 0$ ಆದರೆ,

$$\frac{1}{a+b\sqrt{3}} = \frac{1}{a+b\sqrt{3}}\cdot\frac{a-b\sqrt{3}}{a-b\sqrt{3}} = \left(\frac{a}{a^2-3b^2}\right) + \left(\frac{-b}{a^2-3b^2}\right)\sqrt{3}.$$

ಇಲ್ಲಿ $a^2-3b^2 \neq 0$, ಏಕೆಂದರೆ $\sqrt{3}$ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲ.

$\therefore \dfrac{1}{a+b\sqrt{3}} \in S$ ಮತ್ತು ಇದು $a+b\sqrt{3}$ ನ ಗುಣಾಕಾರದ ಪ್ರತಿಲೋಮವಾಗಿ ವರ್ತಿಸುತ್ತದೆ. (2)

(1) ಮತ್ತು (2) ರಿಂದ S ಎಂಬುದು R ಕ್ಷೇತ್ರದ ಉಪಕ್ಷೇತ್ರ.
ಇದರಲ್ಲಿ $0 = 0 + 0\sqrt{3}$, ಸಂಕಲನದ ಏಕ
ಮತ್ತು $1 = 1 + 0\sqrt{3}$, ಗುಣಾಕಾರದ ಏಕ.

3.5 ಹಿಂದಿನ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ತಿಳಿಸಿರುವ ಸುಕ್ರಮತೆ ಎಂಬ ಭಾವನೆಯನ್ನು ಅವಲಂಬಿಸುವ ಒಂದು ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಅಭ್ಯಾಸಪ್ರಶ್ನೆಯಾಗಿ ಭಾವಿಸಿ ಇಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟು, ಈ ಅಧ್ಯಾಯವನ್ನು ಮುಗಿಸುವೆವು.

In our study of elementary arithmetic, we would have accepted axiomatically that when one integer is divided by another, we obtain a quotient and a remainder (which could be zero). But Euclid wrote this down as a theorem. This theorem is known by the name *Euclid's algorithm.* A rigorous proof involves several results given previously.

Theorem 4. *Euclid's Algorithm. If a and b are integers,* $a \neq 0$, *unique integers q and r exist such that* $b = aq + r$, $0 \leqslant r < |a|$.

q is called the quotient and r the remainder. when b is divided by a.

[In arithmetic, we take a and b as positive integers. Here they may be positive or negative].

Proof (i) First let a be a positive integer. Consider the set $S = \{ b-am : m$ is an integer (positive or negative), $b-am \geqslant 0 \}$.

This set is not empty. For if b is zero or positive, $b-a\cdot 0 \geqslant 0$, while if b is negative, $b-ab \geqslant 0$, since $a \geqslant 1$.

By the property of well-ordering, the set S has a least element r. Let $r = b-aq$. Now $r < a$, for if $r \geqslant a$, $0 \leqslant r-a = b-a(q+1) < r$.

Hence r is not the least element in S. A contradiction thus arises.

$\therefore b = aq+r, \quad 0 \leqslant r < a,$

(ii) Let now $a < 0 \quad \therefore -a > 0$. By the above case,

$b = (-a)q' + r, \quad 0 \leqslant r < (-a)$

$\therefore b = aq+r. \quad q = -q', \quad 0 \leqslant r < |a|.$

ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕವನ್ನು ಮತ್ತೊಂದರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ, ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧವೂ ಒಂದು ಶೇಷವೂ (ಸೊನ್ನೆಯಾಗಿಯೂ ಇರಬಹುದು) ದೊರಕುತ್ತವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಅಂಕಗಣಿತದ ಅಭ್ಯಾಸದಲ್ಲಿ ಸ್ವತಸ್ಸಿದ್ಧವೆಂದು ಭಾವಿಸಿರುವೆವು. ಯೂಕ್ಲಿಡನು ಮಾತ್ರ ಇದನ್ನು ಒಂದು ಪ್ರಮೇಯವೆಂದೇ ಬರೆದಿಟ್ಟನು. ಈ ಪ್ರಮೇಯಕ್ಕೆ ಯೂಕ್ಲಿಡನ ಆಲ್‌ಗರಿದ್ಮ್ ಎಂಬ ಹೆಸರು ಬಂದಿದೆ. ನಿಖರವಾದ ಸಾಧನೆ ಹಿಂದೆ ತಿಳಿಸಿರುವ ಅನೇಕ ವಿಷಯಗಳನ್ನು ಅವಲಂಬಿಸಿದೆ.

ಪ್ರಮೇಯ 4. ಯೂಕ್ಲಿಡನ ಆಲ್‌ಗರಿದ್ಮ್. a, b **ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು,** $a \neq 0$. **ಆಗಿದ್ದರೆ** $b = aq + r$, $0 \leqslant r < |a|$ **ಆಗುವಹಾಗೆ** q, r **ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು ಏಕೈಕವಾಗಿವೆ.**

bನ್ನು a ಇಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ, q ಗೆ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಎಂದೂ, r ಗೆ ಶೇಷ ಎಂದೂ ಹೆಸರು.

[ಅಂಕಗಣಿತದಲ್ಲಿ, a, b ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ. ಇಲ್ಲಿ ಅವು ಧನ ಅಥವಾ ಋಣವಾಗಿರಬಹುದು.]

ಸಾಧನೆ. (i) ಮೊದಲು a ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕ ಎಂದು ತಿಳಿಯೋಣ. ಈಗ $S = \{ b - am : m$ ಪೂರ್ಣಾಂಕ (ಧನ ಅಥವಾ ಋಣ), $b - am \geqslant 0\}$ ಎಂಬ ಗಣವನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಈ ಗಣವು ಶೂನ್ಯಗಣವಲ್ಲ. ಏಕೆಂದರೆ, b ಧನವಾಗಿದ್ದರೆ, ಅಥವಾ ಸೊನ್ನೆಯಾದರೆ, $b - a \cdot 0 \geqslant 0$. b ಋಣವಾಗಿದ್ದರೆ, $a \geqslant 1$ ಆದ್ದರಿಂದ, $b - ab \geqslant 0$.

ಸುಕ್ರಮತೆಯ ಗುಣದ ಪ್ರಕಾರ, S ಗಣದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಕನಿಷ್ಠಾಂಶ r ಇದೆ. $r = b - aq$ ಆಗಿರಲಿ. $r < a$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಏಕೆಂದರೆ $r \geqslant a$ ಆದರೆ,

$$0 \leqslant r - a = b - a(q+1) < r.$$

ಆದ್ದರಿಂದ r, S ನ ಕನಿಷ್ಠಾಂಶವಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ವಿರೋಧವೇರ್ಪಡುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ $b = aq + r$, $0 \leqslant r < a$.

(ii) ಈಗ $a < 0$ ಆಗಿರಲಿ.

$\therefore \ -a > 0$.

ಮೇಲಿನ ಸಂದರ್ಭದಿಂದ, $b = (-a)q' + r$. $0 \leqslant r < (-a)$

ಆದ್ದರಿಂದ $b = aq + r$, $q = -q'$, $0 \leqslant r < |a|$

(iii) Finally we shall show that q and r are unique. Let q'', r'' also possess the properties of q, r. In other words,

$$b = aq+r = aq''+r'', \qquad 0 \leqslant r'' < |a|$$

$$\therefore a(q''-q) = r-r''$$

$$\therefore \ |a| \cdot |q''-q| = |r-r''| . \tag{1}$$

But $|r-r''|$ is either $r-r''$ or $r''-r$.

Now r, r'' are both positive numbers $< |a|$.

$$\therefore |r-r''| < |a|$$

Also if $q'' \neq q$, then $|q''-q| \geqslant 1$

$\therefore$ In (1), the left side $> |a|$, the right side $< |a|$

Since this is impossible, we must have $q'' = q$

$\therefore \ r'' = r$.

(iii) ಕಡೆಯದಾಗಿ q, r ಏಕೈಕ ಎಂದು ತೋರಿಸುವೆವು. q, r ಗಳ ಗುಣಗಳೇ q'', r'' ಗೂ ಇರಲಿ. ಎಂದರೆ,

$$b = aq + r = aq'' + r'', 0 \leq r'' < |a|.$$

$$\therefore a(q'' - q) = r - r''$$

$$\therefore |a| \cdot |q'' - q| = |r - r''| \qquad (1)$$

ಆದರೆ, $|r - r''|$ ಎಂಬುದು $r - r''$ ಅಥವಾ $r'' - r$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

r, r'' ಎರಡೂ $|a|$ ಗಿಂತ ಸಣ್ಣವಾದ ಧನಸಂಖ್ಯೆಗಳು

$$\therefore |r - r''| < |a|.$$

ಮತ್ತು $q'' \neq q$ ಆದರೆ, $|q'' - q| \geqslant 1$

$\therefore$ (1) ರಲ್ಲಿ, ಎಡಗಡೆಯು $> |a|$, ಬಲಗಡೆಯು $< |a|$.

ಇದು ಸಾಧ್ಯವಲ್ಲದುದರಿಂದ. $q'' = q$ ಆಗಲೇಬೇಕು.

$$\therefore r'' = r.$$

CHAPTER 4

Complex Numbers

4.1. The equation $x^2+1=0$ cannot be solved in terms of real numbers. For this gives $x^2 = -1$, but the square of no real number can be negative. To extend our mathematics so as to be able to say that every quadratic equation has got roots, we invent a number i so as to have the property $i^2 = -1$. We then call $a + ib$, where a and b are any real numbers, as a complex number. The student would have studied this and used it in his previous classes.

We now define a complex number by a new method following the nature of work in the previous chapters. We then work out the equivalence of the old and new concepts.

Definition: *An ordered pair of real numbers* (x,y) *will be called a complex number. Two complex numbers* (a, b), (c,d) *are said to be equal if* $a=c$ *and* $b=d$.

The addition and multiplication of complex numbers will be governed by the following rules:

$$(x, y) + (x', y') = (x+x', y+y') \qquad (1)$$

$$(x, y) \cdot (x', y') = (xx'-yy', xy'+yx') \qquad (2)$$

In the pair (x, y), the first number x is called the real part (or component), and the second number y is called the imaginary part (or component) of the complex number.

The set of all complex numbers, or (x, y)–pairs will be denoted by the symbol C. $(0,0)$ is the identity element of addition for this set, while $(1, 0)$ is the identity element of multiplication.

For, $(x, y) + (0, 0) = (x, y)$

$$(x, y) \cdot (1, 0) = (x-0, 0+y) = (x, y)$$

ಅಧ್ಯಾಯ 4

ಮಿಶ್ರಸಂಖ್ಯೆಗಳು

4.1. $x^2+1=0$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಂದ ಬಿಡಿಸಲು ಆಗುವುದಿಲ್ಲ. ಏಕೆಂದರೆ ಇದು $x^2 = -1$; ಆದರೆ ಯಾವ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಯ ವರ್ಗವೂ ಋಣಸಂಖ್ಯೆಯಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಗಣಿತವನ್ನು ವಿಸ್ತಾರಗೊಳಿಸಿ ಪ್ರತಿವರ್ಗಸಮೀಕರಣಕ್ಕೂ ಮೂಲಗಳಿವೆ ಎಂದು ಹೇಳುವುದಕ್ಕೆ ಸಹಕಾರಿಯಾಗುವಂತೆ, i ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು $i = -1$ ಎಂಬ ಗುಣವಿರುವಂತೆ ಸೃಷ್ಟಿಸಿ. $a+ib$ (a, b ವಾಸ್ತವ) ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಮಿಶ್ರಸಂಖ್ಯೆ ಎಂದು ಹೆಸರಿಟ್ಟು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯು ಹಿಂದಿನ ತರಗತಿಗಳಲ್ಲಿ ಅಭ್ಯಸಿಸಿ ಉಪಯೋಗಿಸಿರುವನು.

ಇಲ್ಲಿ ಹಿಂದಿನ ಅಧ್ಯಾಯಗಳಲ್ಲಿರುವ ಸ್ವರೂಪಕ್ಕನುಗುಣವಾಗಿ ಮಿಶ್ರಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಹೊಸದೊಂದು ವಿಧಾನದಿಂದ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಮಾಡಿ, ಈ ಭಾವನೆಯನ್ನು ಹಳೆಯ ಭಾವನೆಯೊಡನೆ ಒಂದುಗೂಡಿಸುತ್ತೇವೆ.

ವ್ಯಾಖ್ಯೆ. ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಒಂದು ಕ್ರಮಾನುಗತ ಜೋಡಿ (x, y) ಎಂಬುದನ್ನು ಒಂದು ಮಿಶ್ರಸಂಖ್ಯೆ ಎಂದು ಕರೆದು, ಎರಡು ಮಿಶ್ರಸಂಖ್ಯೆಗಳು (a, b), (c, d) ಒಂದೇ ಆಗಿರಲು $a=c$, $b=d$ ಎಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸುತ್ತೇವೆ. ಮಿಶ್ರಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸಂಕಲನ ಗುಣಾಕಾರಗಳನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ನಿಯಮಗಳಿಂದ ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸುತ್ತೇವೆ.

$$(x, y) + (x', y') = (x+x', y+y') \qquad (1)$$

$$(x, y) \cdot (x', y') = (xx'-yy', xy'+yx') \qquad (2)$$

(x, y) ಜೋಡಿಯಲ್ಲಿ ಮೊದಲಸಂಖ್ಯೆ x ನ್ನು ಮಿಶ್ರಸಂಖ್ಯೆಯ ವಾಸ್ತವಾಂಶ ಎಂದೂ, ಎರಡನೆಯದಾದ y ನ್ನು ಊಹ್ಯಾಂಶ ಎಂದೂ ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಮಿಶ್ರಸಂಖ್ಯಾಗಣ ಅಥವಾ (x, y) ಯುಗ್ಮಗಳ ಗಣವನ್ನು C ಚಿಹ್ನೆಯಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ. ಈ ಗಣಕ್ಕೆ, $(0, 0)$ ಸಂಕಲನದ ಏಕವಾಗುತ್ತದೆ, $(1, 0)$ ಗುಣಾಕಾರದ ಏಕವಾಗುತ್ತದೆ.

ಹೇಗೆಂದರೆ, $(x, y) + (0, 0) = (x, y)$

$$(x, y) \cdot (1, 0) = (x-0, 0+y) = (x, y).$$

Theorem 1. *The set of complex numbers is a field.*

In the Axioms enumerated in chapter 3.1, the Axioms 1, 2, 3, 6, 7, 8 are obvious, following at once from the corresponding properties of real numbers. The additive inverse of (x, y) is $(-x, -y)$. Hence Axiom 9 is also true.

We have to verify Axioms 4, 5, 10, 11.

Let $a = (x, y)$, $b = (x', y')$, $c = (x'', y'')$.

$$\therefore \quad a\,(bc) = (x, y)\,(x'x'' - y'y'',\ x'y'' + y'x'').$$

$$(ab)\,c = (xx' - yy',\ xy' + yx')\,(x'', y'').$$

By expanding the expressions on the right, we can verify that $a\,(bc) = (ab)c$.

Similarly the truth of Axiom 5 can be verified.
If $ca = cb$, then

$$(x''x - y''y,\ x''y + y''x) = (x''x' - y''y',\ x''y' + y''x')$$

$$\therefore\ x''(x - x') - y''(y - y') = 0$$

$$x''(y - y') + y''(x - x') = 0$$

Since x'', y'' are not both zero, we must have $x - x' = 0$, $y - y' = 0$. i.e. $(x, y) = (x', y')$, or $a = b$. This proves that Axiom 10 is true.

Lastly, when $(x, y) \neq (0, 0)$, we can verify that

$$(x, y)^{-1} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2},\ \frac{-y}{x^2 + y^2}\right)$$

For $(x, y)\,(x, y)^{-1} = \left(\frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2},\ \frac{-xy + xy}{x^2 + y^2}\right)$

$$= (1, 0)$$

Therefore every (x, y) which is not $(0, 0)$ has an inverse.

ಪ್ರಮೇಯ 1. ಮಿಶ್ರಸಂಖ್ಯಾಗಣವು ಒಂದು ಕ್ಷೇತ್ರ.

ಅಧ್ಯಾಯ 3.1 ರಲ್ಲಿ ನಿರೂಪಿತವಾಗಿರುವ ಪ್ರಮಾಣಗಳಲ್ಲಿ 1, 2, 3, 6, 7, 8 ಸ್ಪಷ್ಟ. ಇವು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿರುವ ಅದೇ ಗುಣಗಳಿಂದ ಒಡನೆಯೇ ಲಭಿಸುತ್ತವೆ (x, y) ಯ ಸಂಕಲನದ ವಿಲೋಮ $(-x, -y)$. ಆದ್ದರಿಂದ 9 ನೆಯ ಪ್ರಮಾಣವೂ ನಿಜ.

ಇನ್ನು 4, 5, 10, 11 ನೆಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳೂ ನಿಜವೆಂದು ಪರೀಕ್ಷಿಸಬೇಕು.

$a = (x, y), b = (x', y'), \ c = (x'', y'')$ ಆಗಿರಲಿ.

$$\therefore \ a(bc) = (x, y)(x'x'' - y'y'', x'y'' + y'x'')$$

$$(ab)c = (xx' - yy', xy' + yx')(x'', y'').$$

ಬಲಗಡೆಯ ಉಕ್ತಿಗಳನ್ನು ವಿಸ್ತರಿಸುವುದರಿಂದ, $a(bc) = (ab)c$ ಎಂದು ನೋಡಬಹುದು.

ಹೀಗೆಯೇ, 5 ರ ನಿಜತ್ವವನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸಬಹುದು.

$ca = cb$ ಆದರೆ,

$$(x''x - y''y, x''y + y''x) = (x''x' - y''y', x''y' + y''x')$$

$$\therefore \ x''(x - x') - y''(y - y') = 0$$

$$x''(y - y') + y''(x - x') = 0$$

x'', y'' ಎರಡೂ 0 ಅಲ್ಲದಿರುವುದರಿಂದ, $x - x' = 0, \ y - y' = 0$

ಅಥವಾ $(x, y) = (x', y')$, ಅಥವಾ $a = b$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

10 ನೆಯ ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು ನಿಜವೆಂದು ತೋರಿಸಿದ್ದಾಯಿತು.

ಕಡೆಯದಾಗಿ, $(x, y) \neq (0, 0)$ ಆದಾಗ,

$$(x, y)^{-1} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2}\right)$$

ಎಂದು ನೋಡಬಹುದು.

ಏಕೆಂದರೆ, $$(x, y)(x, y)^{-1} = \left(\frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2}, \frac{-xy + xy}{x^2 + y^2}\right)$$

$$= (1, 0)$$

ಆದ್ದರಿಂದ, (0, 0) ಅಲ್ಲದ ಪ್ರತಿ (x, y) ಗೂ ಒಂದು ಪ್ರತಿಲೋಮವಿದೆ.

4.2. The above definition of a complex number may appear artificial, but we shall see now that it is based entirely on the old concepts.

We have assumed that there is a number $\sqrt{-1}$, and have denoted it by the symbol i. By adding this number i to the set R of real numbers, we obtain a set from which we extract elements of the form $x+iy$. Let D be the set of such elements.

$$D = \{ x + iy ;\ x, y \text{ are real numbers} \}.$$

According to the usual rules,

$$(x+iy) + (x'+iy') = (x+x') + i(y+y')$$
$$(x+iy)\cdot(x'+iy') = xx' + i(xy'+yx') + i^2 yy'$$
$$= (xx'-yy') + i(xy'+yx')$$

If $x+iy = x'+iy'$, then $x-x' = i(y'-y)$

$$\therefore\ (x-x')^2 = -(y'-y)^2$$

Since $(x-x')^2 \geqslant 0$, $(y-y')^2 \geqslant 0$, this is possible only if $x-x' = 0$ and $y-y' = 0$ or $x = x'$, $y = yy$.

In this way, a one-to-one correspondence is set up between the elements $x+iy$ of D and the pairs (x, y) which are elements of C. The element obtained by the addition of two elements of D corresponds to the element obtained by the addition of the corresponding elements of C. Similarly for multiplication. Hence,

Theorem 2. *The set $D = \{ x + iy;\ x, y$ are real numbers $\}$ is isomorphic to the set* C.

This may be indicated by $(x, y) \longleftrightarrow x+iy$.

Hence $(0, 0) \longleftrightarrow 0$

$(0, 1) \longleftrightarrow i$

Hence following the principle of isomorphism, we shall hereafter consider the number (x, y) as identical with the number $x+iy$. So, we shall hereafter denote complex numbers by the notation $x+iy$ instead of (x, y).

4.2 ಮೇಲೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ, ಕೃತಕವೆಂದು ತೋರಬಹುದಾದ, ಮಿಶ್ರಸಂಖ್ಯೆಯ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯು ಹಳೆಯ ಭಾವನೆಗಳ ತಳಹದಿಯಿಂದಲೇ ರಚಿತವಾಗಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಈಗ ತಿಳಿಯೋಣ.

$\sqrt{-1}$ ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆ ಇದೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸಿ ಅದನ್ನು i ಚಿಹ್ನೆಯಿಂದ ಸೂಚಿಸಿದ್ದೇವೆ. ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯಾಗಣ R ಗೆ, ಈ ಹೊಸ ಸಂಖ್ಯೆ i ನ್ನು ಸೇರಿಸಿ ಬರುವ ಗಣದಿಂದ $x+iy$ ರೂಪದ ಅಂಶಗಳನ್ನುಂಟುಮಾಡಿ, ಇವುಗಳ ಗಣವನ್ನು D ಎಂದು ಕರೆಯೋಣ.

$D=\{x+iy ; x, y$ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು$\}$.

ಅನುಭವದಲ್ಲಿರುವ ಗಣಿತನಿಯಮಗಳಂತೆ,

$$(x+iy)+(x'+iy')=(x+x')+i(y+y')$$

$$(x+iy)\cdot(x'+iy')=xx'+i(xy'+yx')+i^2yy'$$

$$=(xx'-yy')+i(xy'+yx')$$

$x+iy=x'+iy'$ ಆದರೆ, $x-x'=i(y'-y)$

$$\therefore\ (x-x')^2=-(y'-y)^2.$$

$(x-x')^2\geqslant 0, (y'-y)^2\geqslant 0$. ಆದ್ದರಿಂದ, ಇದು ಸಾಧ್ಯವಾಗಲು

$x-x'=0,\quad y-y'=0.$ ಅಥವಾ $x=x', y=y'$.

ಈ ರೀತಿ D ಯ ಅಂಶಗಳಾದ $x+iy$ ಗಳಿಗೂ, C ಯ ಅಂಶಗಳಾದ (x, y) ಯುಗ್ಮಗಳಿಗೂ ಒಂದು ಒಂದು ಹೊಂದಾಣಿಕೆ ಏರ್ಪಡುತ್ತದೆ. D ಯ ಎರಡು ಅಂಶಗಳ ಸಂಕಲನದಿಂದ ಬಂದ ಅಂಶ C ಯ ಅನುರೂಪ ಅಂಶಗಳ ಸಂಕಲನಾಂಶಕ್ಕೆ ಹೊಂದಿಕೊಳ್ಳುತ್ತದೆ. ಹೀಗೆಯೇ ಗುಣಾಕಾರಕ್ಕೂ. ಆದ್ದರಿಂದ,

ಪ್ರಮೇಯ 2. $D=\{x+iy ;\ x, y$ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು$\}$ ಗಣವು C ಗಣದೊಂದಿಗೆ ಸಮಾನು ಕ್ರಮಣವನ್ನು ಪಡೆದಿದೆ.

$(x, y)\longleftrightarrow x+iy$ ಎಂದು ಇದನ್ನು ತಿಳಿಸಬಹುದು.

ಇದರಂತೆ $(0,0)\longleftrightarrow 0$

$(0, 1)\longleftrightarrow i$

ಇನ್ನು ಮುಂದೆ (x, y) ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನೂ $x+iy$ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನೂ ಸಮಾನುಕ್ರಮಣದ ತತ್ವವನ್ನನುಸರಿಸಿ, ಒಂದೇ ಎಂದು ಭಾವಿಸುವೆವು. ಆದ್ದರಿಂದ ಇನ್ನು ಮುಂದೆ ಮಿಶ್ರಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು (x,y) ಎಂಬ ಸಂಕೇತಕ್ಕೆ ಬದಲು, $x+iy$ ಎಂಬ ಹಳೆಯ ಸಂಕೇತದಿಂದಲೇ ತೋರಿಸುತ್ತೇವೆ.

When $y = 0$, the number $x + iy$ becomes the real number x. Hence, by the concept of isomorphism, the field R of real numbers is a sub-field of the field C of complex numbers.

4.3. Complex numbers can be pictured by a one-to-one correspondence with points on a Cartesian plane. We represent he number $x+iy$ by the point having the coordinates (x, y). $(x+iy) \leftrightarrow (x, y)$

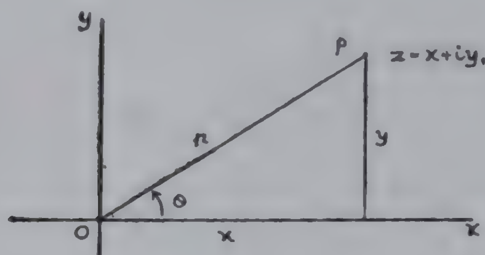


fig. 4·1

If the point (x, y) is denoted by P, the point P represents the complex number $x+iy = z$.

Polar Co-ordinates. If $OP = +\sqrt{x^2+y^2} = r$, and $\theta = x\hat{O}P$, then r and θ are called the polar co-ordinates of P. O is called the pole, and Ox the initial ray. From the figure, $x = r\cos\theta$, and $y = r\sin\theta$. These two equations enable us to determine the values of r and θ. For $r = +\sqrt{x^2+y^2}$, while $\cos\theta = x/r$, and $\sin\theta = y/r$.

r is also called the absolute value or modulus of z. We write this as mod z or $|z|$. The angle θ is called the amplitude (or argument) of z. This will be written am z, amp z or arg z.

$$|z| = \text{mod } z = +\sqrt{x^2+y^2}$$
$$\theta = \text{am } z$$

Since $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$.

$$z = x+iy = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

Hence we have

Theorem 3. *Any complex number can be expressed in the form* $r(\cos\theta + i\sin\theta)$.

$y=0$ ಆದರೆ, $x+iy$ ಎಂಬುದು ವಾಸ್ತವಸಂಖ್ಯೆ x ಆಗುತ್ತದೆ. ಎಂದರೆ, ವಾಸ್ತವಸಂಖ್ಯಾ ಕ್ಷೇತ್ರ R ಎಂಬುದು ಸಮಾನುಕ್ರಮಣ ಭಾವನೆಯಿಂದ Cಯ ಒಂದು ಉಪಕ್ಷೇತ್ರವಾಗುತ್ತದೆ.

4 3. ಮಿಶ್ರಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಾರ್ಟೀಸಿಯನ್ ತಳದಮೇಲಣ ಬಿಂದುಗಳೊಂದಿಗೆ ಒಂದು-ಒಂದು ಹೊಂದಾಣಿಕೆಯಿಂದ ಚಿತ್ರಿಸಬಹುದು. $x+iy$ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು (x, y) ನಿರ್ದೇಶಕಗಳುಳ್ಳ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಚಿತ್ರಿಸುತ್ತೇವೆ. $(x+iy) \leftrightarrow (x,y)$

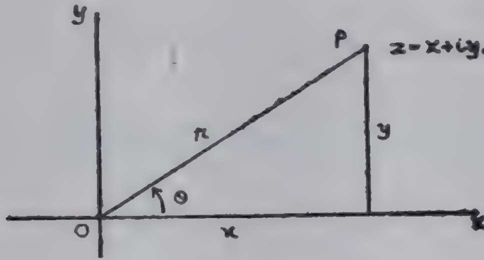


fig. 4·1

(x, y) ಬಿಂದುವನ್ನು P ಎಂದು ಕರೆದರೆ, P ಬಿಂದು $x+iy=z$ ಎಂಬ ಮಿಶ್ರ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಚಿತ್ರಿಸುತ್ತದೆ.

ಧ್ರುವೀಯ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು :— ಈಗ $OP = +\sqrt{x^2+y^2} = r$ ಮತ್ತು $x\hat{O}P$ ಕೋನದ ಅಳತೆ θ ಆದರೆ, r ಮತ್ತು θ ಗಳು P ಬಿಂದುವಿನ ಧ್ರುವೀಯ ನಿದೇಶಕಗಳು ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ, ಇಲ್ಲಿ O ಬಿಂದುವನ್ನು ಧ್ರುವವೆಂದು, Ox ರೇಖೆಯನ್ನು ಮೂಲರೇಖೆ ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ. ಚಿತ್ರದಿಂದ, $x=r\cos\theta$ ಮತ್ತು $y=r\sin\theta$. ಇವೆರಡು ಸಮೀಕರಣಗಳಿಂದ r ಮತ್ತು θ ಗಳ ನಿಖರವಾದ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಸಾಧ್ಯ. ಹೇಗೆಂದರೆ,

$r = +\sqrt{x^2+y^2}$ ಮತ್ತು $\cos\theta=x/r$ ಮತ್ತು $\sin\theta=y/r$.

r ನ್ನು z ಸಂಖ್ಯೆಯ ಧನಾತ್ಮಕ ಬೆಲೆಯೆಂದೂ ಮಾಡ್ಯುಲಸ್ ಎಂದೂ ಕರೆಯುವೆವು. ಇದನ್ನು mod z ಅಥವಾ $|z|$ ಎಂದು ಬರೆಯುವೆವು. θ ಕೋನವನ್ನು z ಸಂಖ್ಯೆಯ ಕೋಣಾಂಕ ಎಂದು ಕರೆಯುವೆವು. ಇದನ್ನು am z, amp z, arg z ಎಂದು ಗುರ್ತಿಸುತ್ತಾರೆ.

$$|z| = \text{mod } z = +\sqrt{x^2+y^2}$$
$$\theta = \text{am } z$$

$x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ ಆದ್ದರಿಂದ,

$\therefore\ z=x+iy=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ ಆದ್ದರಿಂದ.

ಪ್ರಮೇಯ 3. ಯಾವುದೇ ಮಿಶ್ರಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು $r(\cos\theta+i\sin\theta)$ ಎಂಬ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

4.4. Let us now take two complex numbers

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1),\ z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2).$$

By multiplication in the usual way,

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [(\cos\theta_1 \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \sin\theta_2)$$

$$+ i(\sin\theta_1 \cos\theta_2 + \cos\theta_1 \sin\theta_2)]$$

$$= r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)].$$

Proceeding similarly, if $z_3 = r_3(\cos\theta_3 + i\sin\theta_3)$,

$$z_1 z_2 z_3 = r_1 r_2 r_3 [\cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) + i\sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)]$$

and so on :

Corollaries :

1. $|z_1 z_2| = r_1 r_2$. Hence $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

We have obtained this in 2.37 for real numbers. Since by isomorphism, the set of real numbers is a subset of the set of complex numbers, Theorem 35 (1) of 2.37 automatically follows from the present corollary.

More generally, *the modulus of the product of two or more complex numbers is equal to the product of the moduli of the numbers taken separately.*

2. In a similar manner, *the amplitude of the product of two or more complex numbers is equal to the sum of their amplitudes.*

3. The commutative law $z_1 z_2 = z_2 z_1$ and the associative law $z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3$ for multiplication follow at once by this method. The value of z^{-1} also is readily obtained ; $z^{-1} = r^{-1}(\cos\theta - i\sin\theta)$

4. 4. ಈಗ $z_1=r_1 \ (\cos\ \theta_1+i\ \sin\ \theta_1)$, $z_2 = r_2 (\cos \theta_2+i \sin \theta_2)$ ಎಂಬ ಎರಡು ಮಿಶ್ರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವ. ಸಾಮಾನ್ಯ ಗುಣಾಕಾರದಿಂದ.

$$z_1z_2=r_1r_2 [(\cos\ \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1\ \sin \theta_2)$$
$$+i (\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2)]$$
$$= r_1\, r_2 [\cos (\theta_1+\theta_2) + i \sin (\theta_1+\theta_2)]$$

ಹೀಗೆಯೇ ಮುಂದುವರಿಸಿದರೆ, $z_3=r_3 (\cos \theta_3+i \sin \theta_3)$ ಆದರೆ

$$z_1\, z_2\, z_3 = r_1\, r_2\, r_3\ [\cos\ (\theta_1+\theta_2+\theta_3)$$
$$+\ i\ \sin (\theta_1+\theta_2+\theta_3)]$$ ಇತ್ಯಾದಿ.

ಅನುಮಿತಿಗಳು :

1. $| z_1\, z_2 | = r_1\, r_2$

ಅಥವಾ $| z_1\, z_2 | = | z_1 | \cdot | z_2 |$

ಇದನ್ನು ಅಧ್ಯಾಯ 2.37 ರಲ್ಲಿ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಪಡೆದಿರುತ್ತೇವೆ. ಸಮಾನುಕ್ರಮಣ ದೃಷ್ಟಿಯಿಂದ, ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯಾಗಣವು ಮಿಶ್ರಸಂಖ್ಯಾ ಗಣದ ಒಂದು ಉಪಗಣವಾದುದರಿಂದ, ಇಲ್ಲಿ ಪಡೆದಿರುವ ಅನುಮಿತದಿಂದ ಅಧ್ಯಾಯ 2.37, ಪ್ರಮೇಯ 35 (I) ತಾನಾಗಿಯೇ ದೊರಕುತ್ತದೆ.

ಸಾರ್ವತ್ರಿಕವಾಗಿ, ಎರಡು ಅಥವಾ ಅನೇಕ ಮಿಶ್ರಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧದ ಧನಾತ್ಮಕ ಬೆಲೆಯು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಧನಾತ್ಮಕ ಬೆಲೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧಕ್ಕೆ ಸಮ.

2. **ಹೀಗೆಯೇ, ಎರಡು ಅಥವಾ ಅನೇಕ ಮಿಶ್ರಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧದ ಕೋಣಾಂಕವು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಕೋಣಾಂಕಗಳ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಸಮ.**

3. ಗುಣಾಕಾರದ ಪರಿವರ್ತನ ನಿಯಮ $z_1z_2 = z_2z_1$ ಎಂಬುದೂ ಸಹವರ್ತನ ನಿಯಮ, $z_1 (z_2z_3) = (z_1z_2)\, z_3$ ಎಂಬುದೂ ಈ ವಿಧಾನದಿಂದ ಒಡನೆಯೇ ಲಭಿಸುತ್ತವೆ. z^{-1} ನ ಬೆಲೆಯನ್ನೂ ಸುಲಭವಾಗಿ ಪಡೆಯಬಹುದು. $z^{-1} = r^{-1}(\cos \theta - \sin \theta)$.

4.4. Note that except when $z = 0$, $| z | > 0$ always.

But $| 0 | = 0$.

The above figure is called the Argand Diagram. This diagram marks a complex number by the end-point of a vector drawn through the pole O. The operations on vectors adapt themselves to complex numbers. This has been explained in full in *Analytical Geometry and Trigonometry* (in Kannada) Text Book for B.Sc., Part I.

Using this method, the very important theorem.

$$| z_1 | + | z_2 | \geqslant | z_1 + z_2 |$$

has been proved there (P. 185). A separate proof for this will be given in the next section.

Since in terms of isomorphism, the real number set is a subset of the complex numbers, Theorem 35 (2) of 2.37. becomes a particular case of the present theorem.

4.5. **Conjugate Numbers :** The number $x + i(-y) = x - iy$ is called the conjugate of the complex number $x + iy$. Evidently this number also belongs to the field C, and $x + iy$, $x - iy$ are conjugates of each other. The sum and the product of two mutually conjugate numbers are real numbers.

$(x + iy) + (x - iy) = 2x$, a real number.

$(x + iy) . (x - iy) = x^2 + y^2$, a real number.

If $x + iy$ is denoted by z, $x - iy$ will be denoted by $\bar{z}$.

$$\therefore z\bar{z} = | z |^2.$$

4 $z=0$ ಆದ ಹೊರತು, $|z|$ ಯಾವಾಗಲೂ >0 ಎಂದು ಗಮನಿಸಿ. ಆದರೆ, $|0|=0$.

ಮೇಲಿನ ಚಿತ್ರಕ್ಕೆ ಆರ್ಗಾಂಡ್ ಚಿತ್ರ ಎಂದು ಹೆಸರು. ಮಿಶ್ರಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಮೂಲಬಿಂದು O ಮೂಲಕ ಎಳೆದ ಸದಿಶವೊಂದರ ಅಂತ್ಯ ಬಿಂದುವನ್ನಾಗಿ ಈ ಚಿತ್ರವು ಗುರ್ತಿಸುತ್ತದೆ. ಸದಿಶದ ಪರಿಕರ್ಮಗಳೂ ಮಿಶ್ರಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಅಳವಡಿಸಿಕೊಳ್ಳುತ್ತವೆ. ಇದನ್ನು **ಬೀಜರೇಖಾಗಣಿತ ಮತ್ತು ತ್ರಿಕೋಣಮಿತಿ** (ಮೊದಲನೆಯ ಬಿ.ಎಸ್.ಸಿ. ಗೆ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ) ಯಲ್ಲಿ ವಿವರಿಸಿ ಬರೆದಿದೆ. ಮತ್ತು ಈ ವಿಧಾನದಿಂದ ಅಲ್ಲಿ (ಪು. 185),

$$|z_1| + |z_2| \geqslant |z_1+z_2|$$

ಎಂಬ ಬಹು ಮುಖ್ಯವಾದ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಸಾಧಿಸಲಾಗಿದೆ. ಇದಕ್ಕೆ ಬೇರೊಂದು ಸಾಧನೆಯನ್ನು ಮುಂದಿನ ಪರಿಚ್ಛೇದದಲ್ಲಿ ಕೊಡುವೆವು.

ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯಾಗಣವು ಸಮಾನಕ್ರಮಣ ದೃಷ್ಟಿಯಿಂದ ಮಿಶ್ರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಉಪಗಣವಾದ್ದರಿಂದ, ಅಧ್ಯಾಯ 2.37. ಪ್ರಮೇಯ 35 (2) ಇಲ್ಲಿನ ಪ್ರಮೇಯದ ವಿಶೇಷ ಸಂದರ್ಭವಾಗುತ್ತದೆ.

4.5. ಅನುವರ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು

$x+iy$ ಎಂಬ ಮಿಶ್ರಸಂಖ್ಯೆಗೆ $x+i(-y)=x-iy$ ಎಂಬುದು ಅನುವರ್ತ ಸಂಖ್ಯೆ ಎನ್ನಿಸಿಕೊಳ್ಳುವುದು. ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯೂ C ಕ್ಷೇತ್ರದಲ್ಲಿದೆಯೆಂಬುದೂ, $x+iy$, $x-iy$ ಪರಸ್ಪರ ಅನುವರ್ತಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಎಂಬುದೂ ಸ್ಪಷ್ಟ. ಪರಸ್ಪರ ಅನುವರ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವೂ ಗುಣಲಬ್ಧವೂ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು,

$$(x+iy)+(x-iy)=2x= \text{ವಾಸ್ತವ}$$

$$(x+iy)\cdot(x-iy)=x^2+y^2= \text{ವಾಸ್ತವ}.$$

$x+iy$ ನ್ನು z ಎಂದು ಸೂಚಿಸಿದರೆ, $x-iy=\bar{z}$ ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.

$$\therefore z\bar{z}=|z|^2.$$

The equation $z \leftrightarrow \bar{z}$ gives a one–to–one correspondence which maps the numbers in C on itself.

$$\text{Also } (\overline{z_1 + z_2}) = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 \text{ and } \overline{z_1 \; z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2.$$

Hence the correspondence $z \leftrightarrow \bar{z}$ is an isomorphism which maps C on itself. Such an isomorphism is called an *auto-morphism.* The number z is the reflection of z in the x–axis or the real axis.

We shall now prove

Theorem 4. *The modulus (or absolute value) of the sum of two complex numbers is not greater than the sum of the moduli of the numbers taken separately.*

In other words. $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$.

We shall first write down two small results:

(1) We write Rz to denote the real part x of $z = x + iy$ and Iz to denote the imaginary part iy.

Now $Rz = x \leqslant |x| < |z|$.

(2) If $z_1 = r_1 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$,
$z_2 = r_2 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_2)$,
we can easily see that

$$z_1 \bar{z}_2 + z_2 \bar{z}_1 = 2\, R(z_1 \bar{z}_2)$$

We now proceed to the proof of the main theorem. We have

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2) \cdot (\bar{z}_1 + \bar{z}_2) \\ &= |z_1|^2 + z_2|^2 + (z_1 \bar{z}_2 + z_2 \bar{z}_1) \\ &= |z_1|^2 + 2R(z_1 \bar{z}_2) + |z_2|^2 \\ &\leqslant |z_1|^2 + 2|z_1 \bar{z}_2| + |z_2|^2 \\ &= |z_1|^2 + 2|z_1| \cdot |z_2| + |z_2|^2 \\ &\qquad (\because |\bar{z}_2| = |z_2|) \\ &= (|z_1| + |z_2|)^2 \end{aligned}$$

$z \leftarrow \rightarrow \bar{z}$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣವು C ನಲ್ಲಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು C ಮೇಲೆಯೇ ಚಿತ್ರಿಸುವ ಒಂದು–ಒಂದು ಹೊಂದಾಣಿಕೆ. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ ಎಂಬುದೂ $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$ ಎಂಬುದೂ ಸ್ಪಷ್ಟ. ಆದ್ದರಿಂದ $z \leftarrow \rightarrow \bar{z}$ ಹೊಂದಾಣಿಕೆಯು C ನ್ನು ತನ್ನ ಮೇಲೆಯೇ ಚಿತ್ರಿಸುವ ಸಮಾನುಕ್ರಮಣ, ಇಂಥ ಸಮಾನುಕ್ರಮಣವನ್ನು **ಸ್ವಾನುಕ್ರಮಣ** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. $\bar{z}$ ಸಂಖ್ಯೆಯು x- ಅಕ್ಷ ಅಥವಾ ವಾಸ್ತವಾಕ್ಷದಲ್ಲಿ z ನ ಪ್ರತಿಬಿಂಬ.

ಪ್ರಮೇಯ 4.

ಎರಡು ಮಿಶ್ರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತದ ಮಾಡ್ಯುಲಸ್ (ಅಥವಾ ಧನಾತ್ಮಕ ಬೆಲೆ) ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಮಾಡ್ಯುಲಸ್‌ಗಳ ಮೊತ್ತಕ್ಕಿಂತ ಅಧಿಕವಲ್ಲ.

ಎಂದರೆ $| z_1 + z_2 | \leqslant | z_1 | + | z_2 |$.

ಮೊದಲು, ಎರಡು ಸಣ್ಣ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಬರೆಯುವ,

(1) $z = x + iy$ ಯ ವಾಸ್ತವಾಂಶ x ನ್ನು Rz ಎಂದೂ, iy ನ್ನು Iz ಎಂದೂ ಬರೆಯುವೆವು.

ಈಗ $R\, z = x \leqslant | x | < | z |$.

(2) $z_1 = r_1 \; (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$, $z_2 = r_2 \; (\cos \theta_2) + i \sin \theta_2$ ಆದರೆ $z_1 \bar{z}_2 + z_2 \bar{z}_1 = 2R\,(z_1 \bar{z}_2)$ ಎಂದು ಸುಲಭವಾಗಿ ತಿಳಿಯಬಹುದು.

ಮುಖ್ಯ ಪ್ರಮೇಯದ ಸಾಧನೆಯನ್ನು ಈಗ ಕೊಡುವೆವು.

$$
\begin{aligned}
| z_1 + z_2 |^2 &= (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) \\
&= | z_1 |^2 + | z_2 |^2 + (z_1 \cdot \bar{z}_2 + z_2 \cdot \bar{z}_1) \\
&= | z_1 |^2 + 2\,R\,(z_1 \bar{z}_2) + | z_2 |^2 \\
&\leqslant | z_1 |^2 + 2\,| z_1 \bar{z}_2 | + | z_2 |^2 \\
&= | z_1 |^2 + 2\,| z_1 | \cdot | z_2 | + | z_2 |^2 \\
&\qquad (\therefore | \bar{z}_2 | = | z_2 |) \\
&= (| z_1 | + | z_2 |)^2
\end{aligned}
$$

$$\therefore |z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + z_2| .$$

The theorem can be extended.

$$|z_1 + z_2 + z_3| \leqslant |z_1 + z_2| + |z_3|$$
$$\leqslant |z_1| + |z_2| + |z_3$$

Continuing,

$$|z_1 + z_2 + z_3 + \cdots + z_n| \leqslant |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n| .$$

The equality sign arises when and only when the amplitudes of $z_1, z_2, \ldots\ldots, z_n$ are equal, *i.e.* when the points representing $z_1, z_2, \cdots\cdots, z_n$ on the Argand diagram are collinear. This is easily proved geometrically.

4.6. The number $i = \sqrt{-1}$ was invented with the purpose of solving the equation $x^2 + 1 = 0$, and this led to the above mathematics. The two roots of this equation are $+ i$ and $- i$.

In like manner, will it be necessary to invent other new numbers in order to solve other equations

(Ex. $x^3 + 4x + 17 = 0$, $x^{17} + 1 = 0$, $x^8 + x + 4 = 0$), or will the number systems that we have so far obtained be sufficient ? The answer to this question is : They are enough. This will be written in the form of a theorem.

The equation $a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \cdots\cdots + a_n = 0$ is called a polynomial equation of the n^{th} degree. We shall make a brief study of such equations in the succeeding chapters. $a_0, a_1, \ldots\ldots$ may be numbers of any kind. In their general form, they can be complex numbers. A value of z which satisfies the equation will be called a root of the equation.

$$\therefore \quad |z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2| .$$

ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಮುಂದುವರಿಸಬಹುದು.

$$|z_1 + z_2 + z_3| \leqslant |z_1 + z_2| + |z_3|$$
$$\leqslant |z_1| + |z_2| + |z_3|$$

ಹೀಗೆಯೇ ಮುಂದುವರಿಸುತ್ತಾ

$$|z_1 + z_2 + z_3 + \ldots\ldots + z_n| \leqslant |z_1| + |z_2|$$
$$+ \cdots + |z_n| .$$

ಸಮತೆಯ ಚಿಹ್ನೆಯು $z_1, z_2, \ldots, z_n$ ಗಳ ಕೋಣಾಂಕಗಳು ಒಂದೇ ಆದಾಗ, ಎಂದರೆ ಆರ್‌ಗಾಂಡ್ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ $z_1, z_2, \ldots, z_n$ ಗಳನ್ನು ಚಿತ್ರಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳು ಏಕರೇಖಸ್ಥವಾದಾಗ ಮಾತ್ರ ಸಾಧ್ಯ ಎಂಬುದು ಆರ್‌ಗಾಂಡ್ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ರೇಖಾಗಣಿತ ಪ್ರಯೋಗದಿಂದ ಸ್ಪಷ್ಟಪಡುತ್ತದೆ.

4. 6. $x^2 + 1 = 0$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಸಾಧಿಸುವ ಉದ್ದೇಶದಿಂದ $i = \sqrt{1}$ ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸೃಷ್ಟಿಸಿ, ಮೇಲಣ ಗಣಿತವನ್ನುಕಟ್ಟಿದೆವು. ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ $+i$, $-i$ ಎರಡೂ ಮೂಲಗಳು.

ಇದರಂತೆಯೇ ಇನ್ನೂ ಇತರ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು, (ಉದಾ: $x^3 + 4x + 17 = 0$, $x^{17} + 1 = 0$, $x^8 + x + 4 = 0$) ಸಾಧಿಸಬೇಕಾದರೆ, ಹೊಸ ಹೊಸ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸೃಷ್ಟಿಸುತ್ತಾ ಹೋಗಬೇಕೇ, ಇಲ್ಲವೇ ಇದುವರೆಗೆ ನಾವು ಪಡೆದಿರುವ ಸಂಖ್ಯಾವ್ಯೂಹಗಳು ಸಾಕೇ ಎಂದು ಕೇಳಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಉತ್ತರ: ಸಾಕು. ಇದನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರಮೇಯದ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + a_2^{n-2} + \ldots\ldots + a_n = 0$$

ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು n ಪ್ರಮಾಣದ ಬಹುಪದಿ ಸಮೀಕರಣವೆಂದು ಕರೆಯುವೆವು. ಮುಂದಿನ ಅಧ್ಯಾಯಗಳಲ್ಲಿ ಇಂಥ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಸ್ವಲ್ಪಮಟ್ಟಿಗೆ ಅಭ್ಯಸಿಸುವೆವು, ಇಲ್ಲಿ, $a_0, a_1, \ldots\ldots a_n$ ಎಂಥ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದರೂ ಆಗಿರಬಹುದು. ಸಾರ್ವತ್ರಿಕ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಇವು ಮಿಶ್ರಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರಬಹುದು. ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಸರಿದೂಗಿಸುವ z ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲವೆಂದು ಕರೆಯುವೆವು.

Theorem 5. *An equation of the n^{th} degree whose coefficients are complex numbers has n roots.*

If the roots are called $z_1, z_2, \cdots\cdots z_n$, these are also complex numbers. In special cases, some or all may be real numbers.

This theorem is sometimes called the fundamental theorem of algebra. The proof of this belongs to advanced mathematics and is beyond the scope of this book.

If z_1 is a root, we know by the Remainder Theorem that $z-z_1$ is a factor. Students will have been familiar with the Remainder Theorem and its uses in their high school classes. We shall consider this theorem again in the next chapter.

Therefore,

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n = c\,(z-z_1)\,(z-z_2)\ .\ (z-z_n).$$

4·7. Let now $a_0, a_1, \cdots, a_n$ be real numbers. Call the polynomial as $P(z)$.

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n .$$

If the roots are z_r, $r = 1, 2, \dots, n$,

$$P(z) = c\,(z - z_1)\,(z - z_2) \dots (z - z_n).$$

By applying the isomorphism $z_r \longleftrightarrow \bar{z}_r$ on $P(z)$,

it transforms into another polynomial $\bar{P}(z)$.

$$\bar{P}(z) = \bar{c}\,(z - \bar{z}_1)\,(z - \bar{z}_2) \dots (z - \bar{z}_n)$$

Every coefficient in the polynomial $\bar{P}(z)$ is the conjugate number of the corresponding coefficient in $P(z)$.

ಪ್ರಮೇಯ 5. **ಮಿಶ್ರಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಗುಣಕಗಳಾಗಿಉಳ್ಳ n ಪ್ರಮಾಣದ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ n ಮೂಲಗಳು ಇರುತ್ತವೆ.**

ಮೂಲಗಳನ್ನು $z_1, z_2, \ldots\ldots, z_n$ ಎಂದು ಕರೆದರೆ, $z_1, z_2, \ldots, z_n$ ಮಿಶ್ರಸಂಖ್ಯೆಗಳು. ವಿಶೇಷ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಕೆಲವು ಅಥವಾ ಎಲ್ಲಾ ವಾಸ್ತವಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರಬಹುದು.

ಈ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಬೀಜಗಣಿತದ ಮೂಲಪ್ರಮೇಯ ಎಂದು ಕರೆಯುವುದುಂಟು. ಇದರ ಸಾಧನೆಯು ಪ್ರೌಢಗಣಿತಕ್ಕೆ ಸೇರಿದುದಾಗಿ ಇಲ್ಲಿ ಕೊಡಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ.

z_1 ಮೂಲವಾದರೆ $z - z_1$ ಒಂದು ಅಪವರ್ತನ ಎಂಬುದು ಶೇಷ ಪ್ರಮೇಯದಿಂದ ತಿಳಿಯುತ್ತದೆ. ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಹೈಸ್ಕೂಲು ತರಗತಿಗಳಲ್ಲಿ ಶೇಷ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನೂ ಅದರ ಉಪಯೋಗವನ್ನೂ ಪರಿಚಯಗೊಂಡಿರುವರು. ಈ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಮುಂದಿನ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ಪುನಃ ವಿಮರ್ಶಿಸುವೆವು.

ಆದ್ದರಿಂದ,

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n = c\,(z - z_1)(z - z_2)\cdots(z - z_n.)$$

4.7 ಈಗ $a_0, a_1, \ldots, a_n$ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರಲಿ. ಬಹುಪದಿಯನ್ನು $P(z)$ ಎಂದು ಕರೆಯೋಣ,

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n.$$

ಮೂಲಗಳನ್ನು z_r, $r = 1, 2, \ldots, n$ ಎಂದು ಕರೆದರೆ

$$P(z) = c\,(z - z_1)(z - z_2)\cdots(z - z_n).$$

$z_r \longleftrightarrow \bar{z}_r$ ಎಂಬ ಸ್ಥಾನಕ್ರಮಣವನ್ನು $P(z)$ ಮೇಲೆ ಪ್ರಯೋಗಿಸಿದರೆ, $P(z)$ ಬಹುಪದಿಯು ಬೇರೊಂದು ಬಹುಪದಿ $\bar{P}(z)$ ಆಗುತ್ತದೆ.

$$P(z) = \bar{c}\,(z - \bar{z}_1)\,(z - \bar{z}_2).\cdots(z - \bar{z}_n).$$

$\bar{P}(z)$ ಬಹುಪದಿಯಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಗುಣಕವೂ $P(z)$ ನಲ್ಲಿರುವ ಅನುರೂಪ ಗುಣಕದ ಅನುವರ್ತಿ ಸಂಖ್ಯೆ.

Now, if the coefficients of $P(z)$ are all real, then $P(z) = \bar{P}(z)$. Therefore $\bar{c} = c$, and the set $\bar{z}_1, \bar{z}_2, \cdots \bar{z}_n$ is the same as the set $z_1, z_2, \cdots, z_n$ in some order. This will be possible if z_r is real, or otherwise z_r, $\bar{z}_r$ must both occur in the set. Hence if $a + ib$ (a, b real) $= z_r$, $\bar{z}_r = a - ib$ must also be a root of $P(z)$. Hence we have,

Theorem 6. *For a polynomial equation with real coefficients, complex numbers occur as roots in conjugate pairs*

Examples :

(1) $z^2 - z + 1 = 0$. Roots are $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

(2) $z^3 + z^2 + 2z - 4 = 0$. Roots are $z = 1$, $z = -1 + i\sqrt{3}$, $z = -1 - i\sqrt{3}$.

ಈಗ $P(z)$ ನ ಗುಣಕಗಳೆಲ್ಲಾ ವಾಸ್ತವವಾದರೆ, $P(z) = \bar{P}(z)$ ಆಗು ತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $\bar{c} = c$ ಮತ್ತು

$z_1 \cdot z_2 \bullet \ldots, z_n$ ಗಣವು ಯಾವುದೋಕ್ರಮದಲ್ಲಿ $\overline{z_1}, \overline{z_2}, \ldots, \bar{z}_n$ ಆಗಬೇಕು. z_r ವಾಸ್ತವವಾದರೆ ಇದುಸಾಧ್ಯ, ಇಲ್ಲದಿದ್ದರೆ z_r, $\overline{z_r}$ ಎರಡೂ ಈ ಗಣ ದಲ್ಲಿರಬೇಕು. ಎಂದರೆ $a+ib$ (a, b ವಾಸ್ತವ) $= z_r$, ಆದರೆ, $\overline{z_r} = a-ib$ ಸಹ $P(z)$ ನ ಮೂಲವಾಗಿರಬೇಕು,

ಪ್ರಮೇಯ 6. **ವಾಸ್ತವಗುಣಕಗಳುಳ್ಳ ಬಹುಪದಿಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಮಿಶ್ರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಅನುವರ್ತಿ ಜೋಡಿಗಳಲ್ಲಿ ಮೂಲಗಳಾಗಿರುವವು.**

ಉದಾಹರಣೆಗಳು :

(1) $z^2 - z + 1 = 0$ ಮೂಲಗಳು $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(2) $z^3 + z^2 + 2z - 4 = 0$ ಮೂಲಗಳು $z=1$, $z=-1+i\sqrt{3}$
$z = -1 - i\sqrt{3}$

CHAPTER 5

Polynomials

5.1. Let a_0, a_1, ..., a_n be numbers belonging to an integral domain x is another number which may not belong to this domain, but will be assumed to be capable of undergoing with them the operations of addition and multiplication in such a way that the axioms of an integral domain are applicable to these operations. We shall write $x. x \cdots x.$ (r times) as x^r.

Then $a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$ will be called a *polynomial form of degree n.*

The integral domain considered may contain only a finite number of elements, in which case these polynomial forms possess special properties. We shall employ in this book only the field of real numbers, or the domain of integers. Hence the domain contains an infinite number of elements. If we suppose that the number x also is an element of the domain and can take different values in the domain, then x can be considered as a variable. In such case, the polynomial form given above will be called a polynomial function. Only these will be considered here. Briefly a polynomial function will be called a polynomial.

Two polynomials

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots a_n x^n$$

$$q(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n$$

are said to be equal if $a_0 = b_0, a_1 = b_1, \cdots, a_n = b_n$.

The "sum" of the two polynomials

ಅಧ್ಯಾಯ 5

ಬಹುಪದಿಗಳು

5.1. $a_0, a_1, \ldots a_n$ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಒಂದು ಅಂಕಮುಖಪ್ರಾಂತದವು ಗಳಾಗಿರಲಿ. x ಎಂಬುದು ಇನ್ನೊಂದು ಸಂಖ್ಯೆ. ಇದು ಈ ಪ್ರಾಂತಕ್ಕೆ ಸೇರದಿದ್ದರೂ $a_0, a_1, \ldots a_n$ ಗಳೊಡನೆ ಗುಣಾಕಾರ, ಸಂಕಲನಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಬಲ್ಲದು ಎಂದೂ ಅಂಕ ಮುಖಪ್ರಾಂತದ ಪ್ರಮಾಣಗಳು ಈ ಪರಿಕರ್ಮಗಳಿಗೆ ಅಳವಡಿಸುವುವು ಎಂದೂ ತಿಳಿ ಯೋಣ. $x, x \cdots x$, r ಸಲ ಎಂಬುದನ್ನು x^r ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಈಗ, $a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$

ಎಂಬುದನ್ನು ಬಹುಪದಿರೂಪ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇದರ ಪ್ರಮಾಣ n ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ನಾವು ಕುರಿತ ಅಂಕಮುಖಪ್ರಾಂತದಲ್ಲಿ ಕೆಲವೇ (ಪರ್ಯಾಪ್ತ) ಅಂಶಗಳಿರ ಬಹುದು. ಆಗ ಇಂಥ ಬಹುಪದಿರೂಪಗಳು ವಿಶೇಷ ಗುಣಗಳನ್ನುಹೊಂದಿರುತ್ತವೆ. ಈ ಗ್ರಂಥದಲ್ಲಿ, ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯಾಕ್ಷೇತ್ರ ಇಲ್ಲವೇ ಪೂರ್ಣಾಂಕಪ್ರಾಂತ ಇವೆರಡನ್ನು ಮಾತ್ರ ಉಪಯೋಗಿಸುವೆವು. ಆದ್ದರಿಂದ, ಪ್ರಾಂತದಲ್ಲಿ ಅನಂತ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಅಂಶ ಗಳಿರುವುವು. x ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನೂ ಪ್ರಾಂತದ ಹೊರಗೆ ಇರುವುದು ಎಂದು ತಿಳಿಯದೆ ಪ್ರಾಂತಕ್ಕೆ ಸೇರಿದ ಅಂಶವೆಂದೇ ಭಾವಿಸಿ, ಪ್ರಾಂತದಲ್ಲಿ ನಾನಾಬೆಲೆ ಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು, ಎಂದರೆ x ಒಂದು ಚರಸಂಖ್ಯೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. ಈಗ ಮೇಲೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಬಹುಪದಿರೂಪವನ್ನು ಬಹುಪದಿಉತ್ಪನ್ನ ಎಂದು ಕರೆಯುವೆವು. ಇವುಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಇಲ್ಲಿ ವಿವರಿಸುವೆವು. ಸಂಕ್ಷೇಪವಾಗಿ ಬಹುಪದಿ ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು ಬಹುಪದಿ ಎಂದು ಕರೆಯುವೆವು.

ಎರಡು ಬಹುಪದಿಗಳಲ್ಲಿ

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

$$q(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n.$$

$a_0 = b_0,\ a_1 = b_1, \ldots,\ a_n = b_n$ ಆದರೆ ಬಹುಪದಿಗಳು ಸಮವೆಂದೆನಿಸಿ ಕೊಳ್ಳುವುವು.

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

$$q(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m$$

is defined, when $m > n$, by

$$p(x) + q(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) x + \cdots + (a_n + b_n) x^n + b_{n+1} x^{n+1} + \cdots + b_m x^m.$$

Similar defiitions can be given for the cases $m \leqslant n$.

The product of $p(x)$ and $q(x)$ is defined by

$$p(x)\, q(x) = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) x + \cdots + (a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \cdots + a_k b_0) x^k + \cdots + a_n b_m x^{n+m}$$

$$(a_r = 0, \text{ if } r > n;\ b_s = 0, \text{ if } s > m)$$

It is easy to see that the aggregate of all polynomials which can be constructed out of real numbers belong to an integral domain. 0 and 1 also can be considered as polynomials, for

$p(x) = 0$ if $a_0 = a_1 = a_2 = \cdots\cdots = a_n = 0$,
and $p(x) = 1$ if $a_0 = 1,\ a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$.

The set of polynomials satisfies all the ten laws (3.1) governing an integral domain.

The rational function which can be formed from two polynomials is

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m}$$

$(b_0, b_1, \cdots, b_m$ are not all zero).

The set of rational functions is a field.

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

$$q(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m$$

ಎರಡು ಬಹುಪದಿಗಳಾದರೆ, ಅವುಗಳ "ಮೊತ್ತ"ವನ್ನು

$$p(x)+q(x)=(a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+\cdots+(a_n+b_n)x^n$$
$$+b_{n+1}x^{n+1}+\cdots+b_m x^m, (m>n)$$

ಎಂದೂ, ಹೀಗೆಯೇ $m \leqslant n$ ಆದಾಗ, ಇಂಥದೇ ಸೂತ್ರಗಳಿಂದ ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸುತ್ತೇವೆ.

$p(x)$, $q(x)$ಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು

$$p(x)\,q(x)=a_0 b_0+(a_0 b_1+a_1 b_0)x+\cdots$$
$$+(a_0 b_k+a_1 b_{k-1}+\cdots+a_k b_0)x^k+\cdots+a_n b_m x^{n+m}$$

($a_r=0$, $r>n$ ಆದಾಗ; $b_s=0$, $s>m$ ಆದಾಗ)

ಎಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸುತ್ತೇವೆ.

ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಂದ ರಚಿಸಬಹುದಾದ ಬಹುಪದಿಗಳ ಸಮೂಹವೆಲ್ಲಾ ಒಂದು ಅಂಕಮುಖಪ್ರಾಂತಕ್ಕೆ ಸೇರುತ್ತದೆ, ಎಂದು ತಿಳಿಯುವುದು ಸುಲಭ. 0 ಮತ್ತು 1 ಇವನ್ನೂ ಬಹುಪದಿಗಳೆಂದು ತಿಳಿಯಬಹುದು. $a_0=a_1=a_2=\cdots=a_n=0$ ಆದರೆ, $p(x)=0$ ಆಗುತ್ತದೆ. $a_0=1$, $a_1=a_2=\cdots=a_n=0$ ಆದರೆ, $p(x)=1$.

ಅಂಕಮುಖಪ್ರಾಂತದ ಹತ್ತು ನಿಯಮಗಳೂ (§ 3.1) ಬಹುಪದಿಗಳ ಗಣಕ್ಕೆ ಅನ್ವಯಿಸುತ್ತವೆ.

ಎರಡು ಬಹುಪದಿ ಉತ್ಪನ್ನಗಳಿಂದಾಗುವ ಭಿನ್ನರಾಶಿ

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_0+a_1 x+\cdots+a_n x^n}{b_0+b_1 x+\cdots+b_m x^m}, (b_0, b_1, \ldots, b_m \text{ ಎಲ್ಲವೂ } 0 \text{ ಅಲ್ಲ}).$$

ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳ ಗಣವು ಒಂದು ಕ್ಷೇತ್ರ.

5.2 Just as Euclid's algorithm theorem holds for integers, there exists a division theorem for polynomials. We shall establish this here. This theorem is considered as axiomatic in high school algebra, and the division process is illustrated by examples.

Theorem 1. *If $f(x)$ and $g(x)$ are two polynomials, there exists a "quotient" $q(x)$ and a remainder "$r(x)$", which is of degree lower than that of $g(x)$, so as to make*

$$f(x) = g(x)\, q(x) + r(x).$$

Further the quotlent and the remainder exlst uniquely.

For the sake of convenience, the coefficient of the highest power of x in $g(x)$ will be assumed to be 1, so that $g(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots\cdots + a_n$. If the coefficient of the term in x^n is not 1, but a_0 ($\neq 0$), this coefficient can be easily transferred to $q(x)$ and $r(x)$. A polynomial in which the coefficieut of x^n is 1, is called a *monic*.

Proof:

(i) If $g(x) = 1$, then

$$f(x) = g(x)\, f(x) + 0$$

$$i.e.\ q(x) = f(x),\ r(x) = 0.$$

(ii) If $f(x)$ is of smaller degree than $g(x)$,

then $q(x), = 0,\ r(x) = f(x)$

$\therefore f(x) = g(x).0 + f(x)$

(iii) Let m and n be the degrees of $f(x)$ and $g(x)$ respectively, and $m \geqslant n \geqslant 1$. The proof is obtained by mathematical induction.

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m$$

$$g(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_{n-1} x^{n-1} + x^n.$$

Let us suppose that the theorem is true for all polynomials of degree k ($k < m$).

5 . 2 . ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಿಗೆ ಯೂಕ್ಲಿಡನ ಆಲ್‌ಗರಿದ್ಮ್ ಪ್ರಮೇಯ ವಿರುವಂತೆ , ಬಹುಪದಿಗಳಿಗೂ ಭಾಗಹಾರ ವಿಧಿಯ ಪ್ರಮೇಯ ವಿರುವುದು. ಇದನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಸಾಧಿಸುತ್ತೇವೆ. ಹೈಸ್ಕೂಲ್ ಬೀಜಗಣಿತ ದಲ್ಲಿ , ಈ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಸ್ವತ ಸ್ಸಿದ್ಧವೆಂದು ಭಾವಿಸಿ, ಭಾಗಹಾರವಿಧಿಯನ್ನು ಉದಾಹರಣೆಗಳಿಂದ ತೋರಿಸುವರು.

ಪ್ರಮೇಯ 1. $f(x)$, $g(x)$ **ಎರಡು ಬಹುಪದಿಗಳಾದರೆ,** $f(x)=g(x)\,q(x)+r(x)$ **ಆಗುವಂತೆ ಒಂದು " ಭಾಗಲಬ್ಧ "** $q(x)$ **ಮತ್ತು " ಶೇಷ "** $r(x)$ **(ಇದರಪ್ರಮಾಣ** $g(x)$ **ನ ಪ್ರಮಾಣ ಕ್ಕಿಂತಕಡಮೆ) ಏಕೈಕವಾಗಿರುವುವು.**

ಸೌಕರ್ಯಕ್ಕಾಗಿ, $g(x)$ ನಲ್ಲಿ a ನ ಅತ್ಯಧಿಕ ಘಾತದ ಗುಣಕ 1 ಎಂದು ಭಾವಿಸುತ್ತೇವೆ. ಎಂದರೆ $g(x)=x^n+a_1 x^{n-1}+\cdots a_n$. x^n ಪದದ ಗುಣಕ 1 ಅಲ್ಲದ $a_o\ (\neq 0)$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಈ ಗುಣಕವನ್ನು $q(x)$, $r(x)$ ಗಳಿಗೆ ಸುಲಭವಾಗಿ ರವಾನಿಸಬಹುದು. x^n ಪದದ ಗುಣಕ 1 ಇರುವ ಬಹುಪದಿಯನ್ನು ಏಕಕ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಸಾಧನೆ : (i) $g(x)=1$ ಆದರೆ.

$f(x)=g(x)f(x)+0$. ಅಥವಾ $q(x)=f(x)$. $r(x)=0$.

(ii) $f(x)$ ನ ಪ್ರಮಾಣವು $g(x)$ ನ ಪ್ರಮಾಣಕ್ಕಿಂತ ಚಿಕ್ಕದಾದರೆ, $q(x)=0$, $r(x)=f(x)$.

$$\therefore f(x)=g(x)\cdot 0+f(x)$$

(iii) $f(x)$ ನ ಪ್ರಮಾಣ m, $g(x)$ ನ ಪ್ರಮಾಣ n ಗಿಂತ ದೊಡ್ಡದು ಅಥವಾ ಸಮವಾಗಿರಲಿ, ಎಂದರೆ $m \geqslant n \geqslant 1$ ಆಗಿರಲಿ. ಗಣಿತಾನುಮಾನ ದಿಂದ ಸಾಧನೆ ಒದಗುತ್ತದೆ.

$$f(x)=a_0+a_1 x+\cdots+a_m x^m$$

$$g(x)=b_0+b_1 x+\cdots+b_{n-1} x^{n-1}+x^n.$$

ಪ್ರಮೇಯವು k ಪ್ರಮಾಣದ $(k<m)$ ಎಲ್ಲಾ ಬಹುಪದಿಗಳಿಗೂ ನಿಜ ವೆಂದು ಭಾವಿಸೋಣ.

Let $f(x) - g(x) \cdot a_m x^{m-n} = h(x)$ (1)

There being no term in x^m in $h(x)$; its degree $< m$. Hence according to our hypothesis, $s(x)$ and $t(x)$ exist such that $h(x) = g(x)\, s(x) + t(x)$, where the degree of $t(x) < n$ (2)

Using this in (1),

$$f(x) = g(x)\,[a_m x^{m-n} + s(x)] + t(x)$$
$$= g(x)\, q(x) + r(x), \text{ where } q(x) = a_m x^{m-n} + s(x),$$
$$r(x) = t(x)$$

Therefore if the theorem is true for all polynomials of degree less than m, it is true for polynomials of degree m. But, if $f(x)$ is of the first degree, $g(x) = 1$ or $x + a$, and hence the theorem is true.

We have used here the Second Principle of mathematical induction. (Chapter 2, Theorem 17).

We must now show that $q(x)$ and $r(x)$ are unique. If possible, let

$f(x) = g(x)\, q_1(x) + r_1(x)$. where the degree of $r_1(x)$ is less than n

and also $f(x) = g(x)\, q_2(x) + r_2(x)$, where the degree of $r_2(x)$ is less than n.

$\therefore\ g(x)\,[q_1(x) - q_2(x)] = r_1(x) - r_2(x)$.

If $r_1(x) - r_2(x) \neq 0$, its degree must be greater than n, the degree of $g(x)$. This is impossible. Hence $r_1(x) - r_2(x) = 0$, or $r_1(x) = r_2(x)$ $\quad \therefore\ q_1(x) = q_2(x)$.

5. 3. As a special case, let $g(x) = x - a$.

$\therefore\ f(x) = (x - a)\, q(x) + r(x)$, where $r(x)$ is now a constant r.

Putting $x = a$ on both sides

$f(a) = 0.\ q(x) + r \qquad \therefore\ r = f(a)$

Hence we have

Theorem 2. *If $f(x)$ is divided by $x - a$, the remainder obtained is $f(a)$*

This is called the Remainder Theorem. Students will have used this in the high school classes to obtain the factors of $f(x)$. If $f(a) = 0$, then $x - a$ is a factor of $f(x)$

$f(x)-g(x) \cdot a_m x^{m-n} = h(x)$ ಎಂದು ಕರೆಯೋಣ. (1)

$h(x)$ ನಲ್ಲಿ x^m ಪದವಿಲ್ಲವಾದ್ದರಿಂದ, ಇದರ ಪ್ರಮಾಣ $< m$.
ಆದ್ದರಿಂದ ನಮ್ಮ ಭಾವನೆಯಂತೆ,

$h(x) = g(x)\, s(x) + t(x)$, ($t(x)$ ನ ಪ್ರಮಾಣ $< n$)
ಆಗುವಂತೆ $s(x)$, $t(x)$ ಇವೆ. (2)

ಇದನ್ನು (1) ರಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಿಸಿದರೆ,

$$f(x) = g(x). \,[a_m x^{m-n} + s(x)] + t(x)$$

$$= g(x) q(x) + r(x),\ q(x) = a_m x^{m-n} + s(x),\ r(x) = t(x)$$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಪ್ರಮೇಯವು m ಗಿಂತ ಕಡಮೆ ಪ್ರಮಾಣದ ಎಲ್ಲಾ ಬಹುಪದಿಗಳೂ ನಿಜವಿದ್ದರೆ, m ಪ್ರಮಾಣದ ಬಹುಪದಿಗಳಿಗೂ ನಿಜ.

ಆದರೆ $f(x)$ ಮೊದಲನೆಯ ಪ್ರಮಾಣದ್ದಾದರೆ, $g(x) = 1$ ಅಥವಾ $x + a$ ಆಗುವುದರಿಂದ, ಪ್ರಮೇಯವು ನಿಜ. ನಾವಿಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತಿರುವುದು ಗಣಿತಾನುಮಾನದ ಎರಡನೆಯ ತತ್ವ (ಅಧ್ಯಾಯ 2, ಪ್ರಮೇಯ 17).

ಇನ್ನು $q(x)$, $r(x)$ ಏಕೈಕ ಎಂದು ತೋರಬೇಕು. ಸಾಧ್ಯವಿದ್ದಲ್ಲಿ

$f(x) = g(x)\, q_1(x) + r_1(x)$ ನ ಪ್ರಮಾಣ n ಗಿಂತ ಕಡಮೆ ಮತ್ತು $f(x) = g(x)\, q_2(x) + r_2(x)$, $r_2(x)$ ನ ಪ್ರಮಾಣ $< n$ ಆಗಿರಲಿ.

$$\therefore \quad g(x)[q_1(x) - q_2(x)] = r_1(x) - r_2(x)$$

$r_1(x) - r_2(x) \neq 0$ ಆದರೆ, ಅದರ ಪ್ರಮಾಣವು $g(x)$ ನ ಪ್ರಮಾಣ n ಗಿಂತ ಅಧಿಕವಿರಬೇಕು. ಇದು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ, $r_1(x) - r_2(x) = 0$, ಅಥವಾ $r_1(x) = r_2(x)$ $\quad \therefore\ q_1(x) = q_2(x)$.

5.3. ವಿಶೇಷ ಸಂದರ್ಭವಾಗಿ, $g(x) = x - a$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವ.
$\therefore\ f(x) = (x-a)\, q(x) + r(x)$. $r(x)$ ಈಗ ಒಂದು ಸ್ಥಿರಸಂಖ್ಯೆ r.
ಎರಡು ಕಡೆಯಲ್ಲೂ $x = a$ ಹಾಕಿದರೆ,

$f(a) = 0.\, q(x) + r \quad \therefore\ r = f(a)$. ಆದ್ದರಿಂದ

ಪ್ರಮೇಯ 2. $f(x)$ ನ್ನು $x - a$ ಇಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ, ಬರುವ ಶೇಷ $f(a)$. ಇದನ್ನು ಶೇಷಪ್ರಮೇಯ ಎಂಬ ಹೆಸರಿನಿಂದ, ಹೈಸ್ಕೂಲ್ ತರಗತಿಗಳಲ್ಲಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು $f(x)$ ನ ಅಪವರ್ತನಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಲು ಉಪಯೋಗಿಸಿರುವರು. $f(a)=0$ ಆದರೆ, $f(x)$ ಗೆ $x - a$ ಅಪವರ್ತನ.

CHAPTER 6

Determinants

6.1. The student would have previously obtained a brief knowledge about determinants. The theory will be developed here in greater detail, in a satisfactory manner.

6.2. *Inversions*. The student knows* that the numbers 1, 2, 3, 4 can be arranged in $|\underline{4} = 24$ different ways. Of these 1 2 3 4 is the natural order. In all the permutations of these, this natural order will have been altered. Let us count the number of digits following a given digit, which are smaller than it. The sum of such numbers is called the number of ***inversions*** of the given permutation. Thus in the permutation 7253461, all the digits following 7 are less than 7. They are 6 in number. There are 3 digits following 5 and smaller than it, 1 digit after 2, 1 after 3, 1 after 4, 1 after 6. Hence altogether, there are 13 inversions. If the number of inversions is even, the permutation is said to be even, otherwise it is odd.

An interchange of two digits in a permutation is called a ***transposition***. If a permutation contains k inversions, it can be brought to the natural order by making adjacent transpositions k times. Thus, in the above example, we first transpose (7, 2), then (7, 5), and so on. Transposing in this way, the digit 7 reaches the last place after 6 adjacent transpositions. In a similar manner 1 is brought to the first place after 5 adjacent transpositions, 5 is brought to its natural place after 2 adjacent transpositions—in all after 13 adjacent transpositions, the given permutation acquires the natural order 1 2 3 4 5 6 7. The student can try other examples himself. A rigorous proof is not difficult, but will not be explained here.

---

* Pre-University Mathematics, Part I, Chapter 6.

ಅಧ್ಯಾಯ 6

ನಿರ್ಧಾರಕಗಳು

6.1. ನಿರ್ಧಾರಕಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತ ಪರಿಚಯವನ್ನು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯು ಹಿಂದೆಯೇ ಪಡೆದಿರುವನು. ಸಮರ್ಪಕವಾದ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಸಿದ್ಧಾಂತವನ್ನು ಬೆಳೆಸಿ ವಿಸ್ತರಿಸಲು ಇಲ್ಲಿ ತೊಡಗಿರುವೆವು.

6.2. **ವ್ಯತಿಕ್ರಮಗಳು.** 1, 2, 3, 4 ಎಂಬ ಅಂಕಿಗಳನ್ನು ಕ್ರಮ ಬದಲಾಯಿಸಿ $\underline{4} = 24$ ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಹುದೆಂದು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯು ತಿಳಿದಿರುವನು.* ಇವುಗಳ ಪೈಕಿ 1 2 3 4 ಎಂಬುದು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಕ್ರಮ. ಉಳಿದ ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳಲ್ಲೆಲ್ಲಾ ಈ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಕ್ರಮವು ಮಾರ್ಪಟ್ಟಿರುವುದು. ಒಂದು ಅಂಕಿಯ ಮುಂದಕ್ಕೆ ಅದಕ್ಕಿಂತಲೂ ಸಣ್ಣ ಅಂಕಿಗಳು ಎಷ್ಟು ಇವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಎಣಿಸಿ. ಇವುಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಆ ಕ್ರಮಯೋಜನೆಯ **ವ್ಯತಿಕ್ರಮಗಳ** ಸಂಖ್ಯೆ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಉದಾ : 7 2 5 3 4 6 1 ಎಂಬ ಕ್ರಮಯೋಜನೆಯಲ್ಲಿ, 7 ರ ತರುವಾಯ ಇರುವ ಅಂಕಿಗಳೆಲ್ಲವೂ 7 ಕ್ಕಿಂತ ಚಿಕ್ಕವು, ಒಟ್ಟು 6 ಇವೆ. 5ರ ತರುವಾಯ ಚಿಕ್ಕವು 3 ಇವೆ, 2 ರ ತರುವಾಯ 1, 3 ರ ತರುವಾಯ 1, 4 ರ ತರುವಾಯ 1, 6 ರ ತರುವಾಯ 1. ಒಟ್ಟು 13 ವ್ಯತಿಕ್ರಮಗಳು. ಒಟ್ಟು ವ್ಯತಿಕ್ರಮಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಸಮವಾಗಿದ್ದರೆ, ಕ್ರಮಯೋಜನೆಯನ್ನು ಸಮವೆಂದೂ, ವಿಷಮವಾಗಿದ್ದರೆ, ವಿಷಮ ಎಂದೂ ಕರೆಯುವೆವು.

ಒಂದು ಕ್ರಮಯೋಜನೆಯಲ್ಲಿ ಎರಡು ಅಂಕಗಳನ್ನು ಅದಲುಬದಲು ಮಾಡುವಿಕೆಗೆ, ಒಂದು **ಅದಲುಬದಲು** ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಒಂದು ಕ್ರಮಯೋಜನೆಯಲ್ಲಿ k ವ್ಯತಿಕ್ರಮಗಳಿದ್ದರೆ, k ಸಲ ಪಕ್ಕಪಕ್ಕದ ಅದಲುಬದಲು ಮಾಡಿ, ಕ್ರಮಯೋಜನೆಯನ್ನು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಕ್ರಮಕ್ಕೆ ತರಬಹುದು. ಮೇಲಣ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ (7, 2), ಅನಂತರ (7,5), ಹೀಗೆ ಅದಲುಬದಲು ಮಾಡುತ್ತಾ ಹೋಗಿ 7 ಅಂಕಿಯನ್ನು ಕಡೆಯ ಸ್ಥಾನಕ್ಕೆ ತರಲು 6 ಸಲ ಅದಲುಬದಲು ಮಾಡಬೇಕು. ಹೀಗೆಯೇ 1 ನ್ನು ಮೊದಲಸ್ಥಾನಕ್ಕೆ ತರಲು 5 ಸಲ, 5ನ್ನು ಅದರ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸ್ಥಾನಕ್ಕೆ ತರಲು 2 ಸಲ — ಒಟ್ಟು 13 ಪಕ್ಕ ಪಕ್ಕದ ಅದಲುಬದುಲು ಮಾಡಿದ ಮೇಲೆ, 1 2 3 4 5 6 7 ಎಂಬ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಕ್ರಮವು ಒದಗುತ್ತದೆ. ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯು ಇತರ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸಬಹುದು. ನಿಖರವಾದ ಸಾಧನೆಯು ಸುಲಭವಾದರೂ, ಇಲ್ಲಿ ವಿವರಿಸುವುದಿಲ್ಲ.

---

* ಪ್ರೀ ಯೂನಿವರ್ಸಿಟಿ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರ, ಭಾಗ 1, ಅಧ್ಯಾಯ 6

The number of inversions in a given permutation need not be taken as a fixed number, but the difference between two such numbers is an even number always. Thus, the number of inversions in the permutation 12 may be considered as 0, or as 2, – thus 12 → 21 → 12.

Theorem 1. *By a transposition between two digits, the number of inversions is increased or decreased by an odd number*

Proof. Let there be n digits $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$ between p and q. Hence we have $(p, a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n, q)$. To take p beyond q, $n+1$ adjacent transpositions are required. Then to bring q to the left of a_1, n adjacent transpositions are required. Hence $2n+1$ inversions are either produced, or lost.

6.3. ***Determinants.*** Let us write n^2 elements in the form of a square with n rows and n columns, thus :

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \cdots\cdots k_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \cdots\cdots k_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n & b_n & c_n & \cdots\cdots k_n \end{vmatrix}$$

Let us write down products of the form $a_i \; b_j \; c_l \; \ldots\ldots$ so as to contain one element of each row and one element of each column. $i, j, l, \cdots\cdots$ is here a permutation of $1, 2, 3, \cdots\cdots, n$. Let us assign a plus sign to the permutation if the number of inversions in it is an even number and a minus sign if the number is odd. The sum of all the products taken with these signs is defined as the value of the determinant.

ಒಂದು ಕ್ರಮಯೋಜನೆಯ ವ್ಯತಿಕ್ರಮಸಂಖ್ಯೆ ಒಂದೇ ಆಗಿರಬೇಕಾಗಿಲ್ಲ. ಆದರೆ ಎರಡು ವ್ಯತಿಕ್ರಮ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಅಂತರವು ಸಮಸಂಖ್ಯೆ. ಉದಾ: 1 2 ಎಂಬ ಕ್ರಮಯೋಜನದ ವ್ಯತಿಕ್ರಮ ಸಂಖ್ಯೆ 0; ಅಥವಾ 2 ಎಂದೂ ಭಾವಿಸಬಹುದು. $1\ 2 \to 2\ 1 \to 1\ 2$.

ಪ್ರಮೇಯ 1. **ಎರಡು ಅಂಕಿಗಳನ್ನು ಅದಲುಬದಲು ಮಾಡುವುದರಿಂದ, ವ್ಯತಿಕ್ರಮಸಂಖ್ಯೆ ವಿಷಮಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ವ್ಯತ್ಯಾಸಗೊಳ್ಳುತ್ತದೆ.**

ಸಾಧನೆ: p, q ಗಳ ನಡುವೆ $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ಎಂಬ n ಅಂಕಿಗಳಿರಲಿ. ಎಂದರೆ, $(p, a_1, a_2, \ldots, a_n, q)$ ಎಂದಿರುತ್ತದೆ. ಈಗ p ನ್ನು q ಆಚೆಗೆ ಒಯ್ಯಲು, $n+1$ ಪಕ್ಕಪಕ್ಕದ ಅದಲುಬದಲುಗಳು ಬೇಕು. q ನ್ನು a_1 ಇಂದ ಈಚೆಗೆ ಒಯ್ಯಲು n ಪಕ್ಕಪಕ್ಕದ ಅದಲುಬದಲುಗಳು ಬೇಕು, ಇದರಿಂದ ಒಟ್ಟು $2n+1$ ವ್ಯತಿಕ್ರಮಗಳು ಉಂಟಾಗುತ್ತವೆ, ಇಲ್ಲವೇ ಕಳೆದುಹೋಗುತ್ತವೆ.

6.3. **ನಿರ್ಧಾರಕಗಳು.** n^2 ಅಂಶಗಳನ್ನು n ಅಡ್ಡಸಾಲುಗಳೂ n ನೀಟು ಸಾಲುಗಳೂ ಉಳ್ಳ ಚೌಕಂಳಿಯ ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ಬರೆಯೋಣ.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \cdots & k_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \cdots & k_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n & b_n & c_n & \cdots & k_n \end{vmatrix}$$

ಪ್ರತಿ ಅಡ್ಡಸಾಲಿನ ಒಂದು ಅಂಶವೂ ನೀಟುಸಾಲಿನ ಒಂದು ಅಂಶವೂ ಇರುವಂತೆ $a_i\, b_j\, c_l \ldots$ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳನ್ನು ಪಡೆಯೋಣ; ಇಲ್ಲಿ $i, j, l, \ldots$ ಎಂಬುದು $1, 2, 3, \ldots, n$ ನ ಒಂದು ಕ್ರಮಯೋಜನೆ. ಕ್ರಮಯೋಜನೆಯಲ್ಲಿ ವ್ಯತಿಕ್ರಮ ಸಂಖ್ಯೆ ಸಮವಾದರೆ, ಗುಣಲಬ್ಧಕ್ಕೆ ಧನಚಿಹ್ನೆಯನ್ನೂ ವಿಷಮವಾದರೆ ಋಣಚಿಹ್ನೆಯನ್ನೂ ಕೊಡೋಣ. ಈ ಚಿಹ್ನೆಗಳ ಸಮೇತ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳೆಲ್ಲವುಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ನಿರ್ಧಾರಕದ ಬೆಲೆ ಎಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸುತ್ತೇವೆ.

$a_1 b_2 c_3 \dots k_n$ is the *principal diagonal* of the square or the determinant. This product carries a plus sign with it, since 1, 2, 3, ..., n are in the natural order. The sign of the term $a_2 b_1 c_3 \dots k_n$ is —, since there is one inversion.

The determinant is briefly denoted by D or Δ, or by writing out the principal diagonal $(a_1 b_2 c_3 \dots k_n)$. The determinant is said to be *of order n.*

Example: In the determinant $(a_1 b_2 c_3 d_4 e_5)$ of the 5th order, what are the signs of the terms $a_3 b_4 c_1 d_5 e_2$ and $a_5 b_4 c_3 d_2 e_1$?

To bring 3 4 1 5 2 to the natural order, 1 must be moved through 2 places to the left, and then 2 through 3 places to the left. $\therefore$ Number of inversions $= 2 + 3 = 5 =$ odd. The sign of the term is thus —

Similarly, in the permutation 5 4 3 2 1, the number of inversions $= 4 + 3 + 2 + 1 = 10 =$ even. The sign of the term is + .

Points to be learnt from the definition of a determinant.

(i) The total number of terms in the expansion of the determinant is $n!$

(ii) Half of these have the + sign and the other half – sign.

Let there be p terms with + sign, and q with — sign. If in a term with + sign, two elements are transposed, then the sign changes by Theorem 1. Hence from the p positive terms, we can obtain p negative terms. $\therefore q \geqslant p$. Similarly $p \geqslant q$. $\therefore p = q$.

(iii) Every term in the expansion of the determinant must contain one and only one element from each row, and one and only one element from each column. For over the digits of any permutation (ex: 6 2 5 7 1 3...), we can select and write down one element from each row. Similarly for columns. Hence no term in the expansion of the determinant can contain two or more elements from the same row or column.

6.4. It is also usual to write the determinant in the form.

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots\dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots\dots & a_{2n} \\ \dots & \dots\dots\dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots\dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$a_1\, b_2\, c_3\, \dots\, k_n$ ಎಂಬುದು ಚೌಕಂಳಿಯ ಅಥವಾ ನಿರ್ಧಾರಕದ ಪ್ರಧಾನ ಕರ್ಣ. ಈ ಗುಣಲಬ್ಧಕ್ಕೆ ಧನಚಿಹ್ನೆ ಇರುತ್ತದೆ. ಏಕೆಂದರೆ 1, 2, 3, ... n ಸ್ವಾಭಾವಿಕಕ್ರಮದಲ್ಲಿವೆ. $a_2\, b_1\, c_3\, \dots\, k_n$ ಪದದ ಚಿಹ್ನೆ —, ಒಂದು ವ್ಯತಿಕ್ರಮ ವಿರುವುದರಿಂದ.

ನಿರ್ಧಾರಕವನ್ನು ಸಂಕ್ಷೇಪವಾಗಿ D ಅಥವಾ $\triangle$ ಎಂದೂ, ಪ್ರಧಾನಕರ್ಣವನ್ನು ಬರೆದು $(a_1\, b_2\, c_3\, \dots\, k_n)$ ಎಂದೂ ತಿಳಿಸುವುದುಂಟು. n ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ನಿರ್ಧಾರಕದ **ಪರಿಮಾಣ** ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾ: $(a_1\, b_2\, c_3\, d_4\, e_5)$ ಎಂಬ 5 ನೆಯ ಪರಿಮಾಣದ ನಿರ್ಧಾರಕದಲ್ಲಿ, $a_3\, b_4\, c_1\, d_5\, e_2$ ಮತ್ತು $a_5\, b_4\, c_3\, d_2\, e_1$ ಎಂಬ ಪದಗಳ ಚಿಹ್ನೆಗಳೇನು ?

3 4 1 5 2 ಈ ಕ್ರಮಯೋಜನೆಯನ್ನು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಕ್ರಮಕ್ಕೆ ತರಲು, 1ನ್ನು ಎರಡು ಸ್ಥಾನ ಎಡಕ್ಕೂ, ಅನಂತರ 2 ನ್ನು 3 ಸ್ಥಾನ ಎಡಕ್ಕೂ, ತಳ್ಳಬೇಕು,

$\because$ ವ್ಯತಿಕ್ರಮಸಂಖ್ಯೆ $= 2+3=5=$ ವಿಷಮ ಪದದ ಚಿಹ್ನೆ—

ಹೀಗೆಯೇ, 5 4 3 2 1 ಕ್ರಮಯೋಜನೆಯಲ್ಲಿ, ವ್ಯತಿಕ್ರಮಸಂಖ್ಯೆ $4+3+2+1=10=$ ಸಮ. ಪದದ ಚಿಹ್ನೆ $+$.

ನಿರ್ಧಾರಕದ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯಿಂದ ತಿಳಿದು ಬರುವ ವಿಷಯಗಳು :—

(i) **ನಿರ್ಧಾರಕದ ವಿಸ್ತರಣೆಯಲ್ಲಿರುವ ಒಟ್ಟು ಪದಗಳು** n, !

(ii) ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಅರ್ಧಕ್ಕೆ $+$ ಚಿಹ್ನೆಯೂ, ಅರ್ಧಕ್ಕೆ — ಚಿಹ್ನೆಯೂ ಇರುತ್ತವೆ.

$+$ ಚಿಹ್ನೆಯವು p ಇರಲಿ, — ಚಿಹ್ನೆಯವು q ಇರಲಿ. $+$ ಚಿಹ್ನೆಯ ಒಂದು ಪದದಲ್ಲಿ ಎರಡು ಅಂಶಗಳನ್ನು ಅದಲುಬದುಲು ಮಾಡಿದರೆ, ಪ್ರಮೇಯ 1 ರಂತೆ, ಚಿಹ್ನೆಯು ಬದಲಾಗುತ್ತದೆ. ಹೀಗೆ p ಪದಗಳಿಂದ p ಋಣಪದಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು. $\therefore q \geqslant p$. ಹೀಗೆಯೇ $p \geqslant q \quad \therefore p = q$.

(iii) ನಿರ್ಧಾರಕದ ವಿಸ್ತರಣೆಯಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಪದದಲ್ಲೂ ಪ್ರತಿ ಅಡ್ಡಸಾಲಿನ ಒಂದು ಅಂಶವೂ ಪ್ರತಿ ನೀಟುಸಾಲಿನ ಒಂದು ಅಂಶವೂ ಇದ್ದೇ ಇರಬೇಕು. ಏಕೆಂದರೆ. ಯಾವುದೇ ಕ್ರಮಯೋಜನೆ (ಉದಾ : 6 2 5 7 1 3 ...) ಯ ಅಂಕಿಗಳ ಮೇಲೆ ಒಂದೊಂದು ಅಡ್ಡಸಾಲಿನಿಂದ ಒಂದೊಂದು ಅಂಶವನ್ನು ಆರಿಸಿ ಬರೆಯಬಹುದು. ಹೀಗೆಯೇ ನೀಟುಸಾಲುಗಳಿಗೆ. ಆದಕಾರಣ, ಯಾವುದೇ ಪದದಲ್ಲಿ ಒಂದೇ ಅಡ್ಡ ಅಥವಾ ನೀಟುಸಾಲಿನಿಂದ ಎರಡು ಅಥವಾ ಹೆಚ್ಚು ಅಂಶಗಳು ಬರಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ,

6.4. ನಿರ್ಧಾರಕವನ್ನು ಮೇಲೆ ಬರೆದಿರುವುದರ ಬದಲು,

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$ ಎಂದೂ ಬರೆಯಬಹುದು,

This is more satisfactory. 11, 12, ... should be read 'one one', 'one two',...(not eleven, twelve...). The first digit indicates the number of the row, and the second the number of the column. According to the definition, the value of the determinant is $\Sigma \pm a_{1i}\, a_{2j}\, a_{3k} \ldots\ldots$.

The plus sign is to be taken if the number of inversions in the permutation $i, j, k, \ldots\ldots$ of $1, 2, 3, \cdots, n$ is an even number, and the minus sign is to be taken if this number is odd.

By interchanging the rows and columns of D, we obtain the determinant

$$D' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \cdots\cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \cdots\cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots\cdots\cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

By definition, its expansion is $\Sigma \pm a_{i1}\ a_{j2}\ a_{k3} \ldots \ldots$ where the + or the — sign is determined according to the number of inversions in the permutation $i, j, k, \ldots\ldots$ Therefore this expansion and the expansion of D contains the same terms arranged differently. Therefore $D = D'$.

[The student may verify this by expanding the third-order determinant $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

and its transpose $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$.

If he is unable to follow the above general proof, he may content himself with such verification].

The theorem we have obtained is the following :

Theorem 2. *The value of a determinant is unaltered by interchanging its rows and columns.*

ಇದು ಹೆಚ್ಚು ಸಮರ್ಪಕ. 11, 12, ... ಇವನ್ನು ಒಂದು ಒಂದು, ಒಂದು ಎರಡು, ... ಎಂದು ಓದಬೇಕು. (ಹನ್ನೊಂದು, ಹನ್ನೆರಡು .... ಎಂದಲ್ಲ.) ಮೊದಲನೆಯ ಅಂಕಿಯು ಅಡ್ಡಸಾಲಿನ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನೂ ಎರಡನೆಯ ಅಂಕಿಯು ನೀಟುಸಾಲಿನ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನೂ ತಿಳಿಸುತ್ತವೆ. ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯಂತೆ, ನಿರ್ಧಾರಕದ ಬೆಲೆ.

$$\Sigma \pm a_{1i} \; a_{2j} \; a_{3k} \cdots$$

$(1, 2, 3, 4, \ldots n)$ ನ ಕ್ರಮಯೋಜನೆಯಾದ $(i, j, k, \ldots)$ ಯಲ್ಲಿ ವ್ಯತಿಕ್ರಮಸಂಖ್ಯೆ ಸಮವಾದರೆ + ಚಿಹ್ನೆಯನ್ನೂ, ವಿಷಮವಾದರೆ — ಚಿಹ್ನೆಯನ್ನೂ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬೇಕು.

ಈಗ D ಯಲ್ಲಿ ಅಡ್ಡಸಾಲುಗಳನ್ನು ನೀಟುಸಾಲುಗಳನ್ನಾಗಿಯೂ ನೀಟುಸಾಲುಗಳನ್ನು ಅಡ್ಡಸಾಲುಗಳನ್ನಾಗಿಯೂ ಅದಲುಬದಲು ಮಾಡಿ.

$$D^1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \ldots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \ldots & a_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

ಎಂಬ ನಿರ್ಧಾರಕವು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯಂತೆ, ಇದರ ವಿಸ್ತರಣೆ

$$\Sigma \pm a_{i1} \; a_{j2} \; a_{k3} \ldots$$

$i, j, k, \ldots$ ಕ್ರಮಯೋಜನೆಯ ವ್ಯತಿಕ್ರಮಸಂಖ್ಯೆಗನುಗುಣವಾಗಿ + ಅಥವಾ — ಚಿಹ್ನೆ ನಿಷ್ಕರ್ಷೆ ಹೊಂದುತ್ತದೆ. ಆದುದರಿಂದ ಈ ವಿಸ್ತರಣೆಯೂ D ಯ ವಿಸ್ತರಣೆಯೂ ಒಂದೇ ಪದಗಳನ್ನು ಕ್ರಮಪಲ್ಲಟದೊಡನೆ ಕೊಡುತ್ತವೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ $D = D'$.

[ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯು ಮೂರನೆ ಪರಿಮಾಣದ ನಿರ್ಧಾರಕ $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

ಮತ್ತು ಅದರ ಅದಲು $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$, ಇವೆರಡನ್ನೂ ವಿಸ್ತರಿಸಿ ತಾಳೆನೋಡಲಿ. ಮೇಲಿನ ಸಾರ್ವತ್ರಿಕ ಸಾಧನೆಯು ಕಠಿನವಾಗಿ ಕಂಡಲ್ಲಿ, ಹೀಗೆ ತಾಳೆ ನೋಡಿಯೇ ತೃಪ್ತಿಹೊಂದಲಿ.] ನಾವು ಪಡೆದಿರುವ ಪ್ರಮೇಯವಿದು.

ಪ್ರಮೇಯ 2. **ನಿರ್ಧಾರಕದಲ್ಲಿ ಅಡ್ಡಸಾಲುಗಳನ್ನೂ ನೀಟು ಸಾಲುಗಳನ್ನೂ ಅದಲುಬದಲು ಮಾಡಿದರೆ, ನಿರ್ಧಾರಕದ ಬೆಲೆ ವ್ಯತ್ಯಾಸಗೊಳ್ಳುವುದಿಲ್ಲ.**

Theorem 3. *By interchanging any two rows (or columns), the value of the determinant is multiplied by -1. i.e. its value becomes $-D$.*

Observe the expansion of D. By interchanging two rows, two digits get transposed in every permutation. By Theorem 1, the number of inversions becomes odd if it was even, and becomes even if it was odd. Hence the sign of every term in Σ is altered. The theorem is therefore proved.

The same argument holds for columns; or, having proved the theorem for rows, Theorem 2 may be used.

[Let the student verify the truth of the theorem for determinants of the third and fourth orders.]

6.5. Theorem 4. *If in a determinant two rows (or columns) are identical, the value of the determinant is zero.*

By interchanging these rows (or columns), the determinant is unaltered. But its value is multiplied by -1, according to Theorem 3.

$$\therefore D = -D \qquad \therefore D = 0.$$

Theorem 5. *If all the elements of a row (or column) are multiplied by a given number, the value of D is multiplied by the same number.*

For in the expansion of D or D' in 6.4, every term is multiplied by the given number.

Theorem 6. *If the elements of a row (or column) are obtained by multiplying those of another row (or column) by k, the value of the determinant is zero.*

ಪ್ರಮೇಯ 3. **ನಿರ್ಧಾರಕದ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಅಡ್ಡಸಾಲುಗಳನ್ನು (ಅಥವಾ ನೀಟುಸಾಲುಗಳನ್ನು) ಅದಲುಬದುಲು ಮಾಡಿದರೆ, ನಿರ್ಧಾರಕದ ಬೆಲೆ — 1 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ. ಎಂದರೆ, ಬೆಲೆ $-D$ ಆಗುತ್ತದೆ.**

D ಯ ವಿಸ್ತರಣೆಯನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಎರಡು ಅಡ್ಡಸಾಲುಗಳನ್ನು ಅದಲು ಬದುಲು ಮಾಡುವುದರಿಂದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಕ್ರಮಯೋಜನೆಯಲ್ಲಿಯೂ ಎರಡು ಅಂಕಿಗಳನ್ನು ಅದಲುಬದುಲು ಮಾಡಿದಂತಾಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಪ್ರಮೇಯ 1 ರಂತೆ ವ್ಯತಿಕ್ರಮಸಂಖ್ಯೆ ಸಮವಿದ್ದರೆ ವಿಷಮವಾಗುತ್ತದೆ, ವಿಷಮವಿದ್ದರೆಸಮವಾಗುತ್ತದೆ. Σ ದಲ್ಲಿರುವ ಪ್ರತಿಪದದ ಚಿಹ್ನೆಯೂ ಬದಲಾಗುತ್ತದೆ ಆದ್ದರಿಂದ, ಪ್ರಮೇಯವು ಸಾಧಿತವಾಯಿತು.

ನೀಟುಸಾಲುಗಳಿಗೂ ಹೀಗೆಯೇ, ಅಥವಾ ಅಡ್ಡಸಾಲುಗಳಿಗೆ ಸಾಧಿಸಿದಮೇಲೆ, ಪ್ರಮೇಯ 2 ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು.

ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯು ಪ್ರಮೇಯದ ನಿಜಾಂಶವನ್ನು 3 ಅಥವಾ 4ನೇ ಪರಿಮಾಣದ ನಿರ್ಧಾರಕಗಳಲ್ಲಿ ತಾಳೆ ನೋಡಿಕೊಳ್ಳಲಿ.]

6.5. ಪ್ರಮೇಯ 4. **ನಿರ್ಧಾರಕದಲ್ಲಿ ಎರಡು ಅಡ್ಡಸಾಲುಗಳ (ಅಥವಾ ನೀಟುಸಾಲುಗಳ) ಅಂಶಗಳು ಒಂದೇ ಆದಲ್ಲಿ, ನಿರ್ಧಾರಕದ ಬೆಲೆ ಸೊನ್ನೆ.**

ಈ ಸಾಲುಗಳನ್ನು ಅದಲುಬದುಲು ಮಾಡುವುದರಿಂದ, ನಿರ್ಧಾರಕವು ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಹೊಂದುವುದಿಲ್ಲ. ಆದರೆ, ಪ್ರಮೇಯ 3 ರಂತೆ, ಬೆಲೆ — 1ರಿಂದ ಗುಣಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ.

$$\therefore D = -D \qquad \therefore D = 0.$$

ಪ್ರಮೇಯ 5. **ಯಾವುದೇ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿರುವ ಅಂಶಗಳೆಲ್ಲವನ್ನೂ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ, D ಯ ಬೆಲೆಯೂ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಗುಣಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ.**

ಏಕೆಂದರೆ, 6.4 ರಲ್ಲಿ ಬರೆದಿರುವ D ಅಥವಾ D' ವಿಸ್ತರಣೆಯಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಪದವೂ ದತ್ತಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಗುಣಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ.

ಪ್ರಮೇಯ 6. **ಒಂದು ಸಾಲಿನ (ಅಡ್ಡ ಅಥವಾ ನೀಟು) ಅಂಶಗಳು ಮತ್ತೊಂದು ಸಾಲಿನ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಯಾವುದಾದರೂ ಸಂಖ್ಯೆ ಇಂದ ಗುಣಿಸಿ ಬಂದಿದ್ದರೆ, ನಿರ್ಧಾರಕದ ಬೆಲೆ ಸೊನ್ನೆ.**

For, by Theorem 5, k is a factor of the determinant. After removing this factor, the determinant has two rows (or columns) identical. Hence its value is zero, by Theorem 4.

6.6. The following examples illustrate the above theorems.

1. Expand the determinant $D \equiv \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

directly from the definition.

Write down all the permutations of 1, 2, 3, and obtain the corresponding signs. The permutations are 1 2 3, 1 3 2, 2 1 3, 2 3 1, 3 1 2, 3 2 1. Their signs are +, −, −, +, +, − respectively.

$$\therefore D = a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1.$$

2. $$D \equiv \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 7 & -1 & 0 \\ 3 & 9 & 12 & 15 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

The third row is obtained by multiplying the first row by 3.

3. Show that $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -5 \\ -2 & -4 & 6 \\ 5 & 7 & -2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 2 \end{vmatrix}$

Remove the factor −2 from the second row of the determinant on the left, and then the factor −1 from the third column.

4. Prove that $\begin{vmatrix} bc & a & a^2 \\ ca & b & b^2 \\ ab & c & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}$

Call the determinant on the left as D. Multiplying the rows by a, b, c respectively, we have

ಪ್ರಮೇಯ 5 ರಂತೆ, ನಿರ್ಧಾರಕಕ್ಕೆ k ಅಪವರ್ತನವಾಗುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನು ಹೊರಕ್ಕೆ ತೆಗೆದರೆ, ಉಳಿಯುವ ನಿರ್ಧಾರಕದಲ್ಲಿ ಎರಡು ಸಾಲುಗಳು ಒಂದೇ ಆಗಿರುತ್ತವೆ. ಪ್ರಮೇಯ 4 ರಂತೆ, ಇದರ ಬೆಲೆ ಸೊನ್ನೆ.

6.6 ಈ ಪ್ರಮೇಯುಗಳನ್ನು ವಿಶದೀಕರಿಸುವಂತೆ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಕೊಡುವೆವು.

1. $$D \equiv \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$ ನಿರ್ಧಾರಕವನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯಿಂದಲೇ ವಿಸ್ತರಿಸಿ.

1 2 3 ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಎಲ್ಲಾ ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳನ್ನೂ ಬರೆದು, ಅವಕ್ಕನುಗುಣವಾದ ಚಿಹ್ನೆಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಿರಿ. 1 2 3, 132, 213, 231, 312, 321 ಇವೇ ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳು. ಚಿಹ್ನೆಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ +, —, —, +, +, — ಆಗಿರುತ್ತವೆ.

$$\therefore D = a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1.$$

2. $$D \equiv \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 7 & -1 & 0 \\ 3 & 9 & 12 & 15 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

ಒಂದನೇ ಸಾಲನ್ನು 3 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ. ಮೂರನೇ ಸಾಲು ಬರುತ್ತದೆ.

3. $$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -5 \\ -2 & -4 & 6 \\ 5 & 7 & -2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 2 \end{vmatrix}$$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಎಡಗಡೆಯ ನಿರ್ಧಾರಕದ ಎರಡನೆಯ ಅಡ್ಡಸಾಲಿನಿಂದ —2 ಅಪವರ್ತನವನ್ನು ತೆಗೆದು, ಅನಂತರ ಮೂರನೆಯ ನೀಟುಸಾಲಿನಿಂದ —1 ಅಪವರ್ತನವನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ.

4. $$\begin{vmatrix} bc & a & a^2 \\ ca & b & b^2 \\ ab & c & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c \end{vmatrix}$$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಎಡಗಡೆಯ ನಿರ್ಧಾರಕವನ್ನು D ಎಂದು ಕರೆಯಿರಿ. ಅಡ್ಡಸಾಲುಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ a, b, c ಇಂದ ಗುಣಿಸಿ.

$$abcD = \begin{vmatrix} abc & a^2 & a^3 \\ abc & b^2 & b^3 \\ abc & c^2 & c^3 \end{vmatrix}.$$

Remove the factor *abc* from the first column.

5. Similarly, $\begin{vmatrix} bcd & a & a^2 & a^3 \\ cda & b & b^2 & b^3 \\ dab & c & c^2 & c^3 \\ abc & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 & a^4 \\ 1 & b^2 & b^3 & b^4 \\ 1 & c^2 & c^3 & c^4 \\ 1 & d^2 & d^3 & d^4 \end{vmatrix}$

6.7. Cut off from a determinant the row and the column containing a particular element. Then the determinant that remains, the positions of the other elements being unchanged, is called the *minor* of that element.

Ex: $$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

The minor of a_1 is—

$$\begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

The minor of b_3 is—

$$\begin{vmatrix} a_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & c_2 & d_2 \\ a_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

Hereafter, we shall be using determinants of the third or fourth order only. But all statements will be applicable to a determinant of any order.

6.8 *The expansion of a determinant.* Any term in the expansion of a determinant will contain one element of any row and one element of any column. Hence, it must be possible to write down the expansion of a determinant as a linear function of the elements of any particular row or column. Thus, the determinant D in 6.7 can be expressed in the forms—

$$\begin{aligned} D &= a_1 A_1 + b_1 B_1 + c_1 C_1 + d_1 D_1 \\ &= a_2 A_2 + b_2 B_2 + c_2 C_2 + d_2 D_2 \\ &= a_3 A_3 + b_3 B_3 + c_3 C_3 + d_3 D_3 \\ &= a_4 A_4 + b_4 B_4 + c_4 C_4 + d_4 D_4 \end{aligned}$$

$$\therefore \quad abc\, D = \begin{vmatrix} abc & a^2 & a^3 \\ abc & b^2 & b^3 \\ abc & c^2 & c^3 \end{vmatrix}$$

ಈಗ ಮೊದಲನೆಯ ನೀಟಸಾಲಿನಿಂದ abc ಅಪವರ್ತನೆಯನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ.

5. ಹೀಗೆಯೇ
$$\begin{vmatrix} bcd & a & a^2 & a^3 \\ cda & b & b^2 & b^3 \\ dab & c & c^2 & c^3 \\ abc & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 & a^4 \\ 1 & b^2 & b^3 & b^4 \\ 1 & c^2 & c^3 & c^4 \\ 1 & d^2 & d^3 & d^4 \end{vmatrix}$$

6.7. ನಿರ್ಧಾರಕದ ಒಂದು ಅಂಶವಿರುವ ಅಡ್ಡಸಾಲನ್ನೂ ನೀಟಸಾಲನ್ನೂ ತೊಡೆದುಹಾಕಿದಮೇಲೆ, ಉಳಿದ ಅಂಶಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಸ್ಥಾನಪಲ್ಲಟ ಮಾಡದೆ ಉಂಟಾಗುವ ನಿರ್ಧಾರಕವನ್ನು ಆ ಅಂಶದ **ಲಘು** ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾ : $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$

a_1 ನ ಲಘು $= \begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$; b_3 ಯ ಲಘು $= \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & c_2 & d_2 \\ a_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$

ಇನ್ನು ಮುಂದೆ, ಮೂರನೆಯ ಅಥವಾ ನಾಲ್ಕನೆಯ ಪರಿಮಾಣದ ನಿರ್ಧಾರಕಗಳನ್ನೇ ಬಳಸುತ್ತೇವೆ. ಆದರೆ, ಎಲ್ಲ ಹೇಳಿಕೆಗಳೂ ಯಾವುದೇ ಪ್ರಮಾಣದ ನಿರ್ಧಾರಕಕ್ಕೂ ಅನ್ವಯಿಸುವುವು.

6.8. **ನಿರ್ಧಾರಕದ ವಿಸ್ತರಣೆ :** ನಿರ್ಧಾರಕದ ವಿಸ್ತರಣೆಯ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪದದಲ್ಲಿಯೂ ಯಾವುದೇ ಅಡ್ಡಸಾಲಿನ ಒಂದು ಅಂಶವೂ ಯಾವುದೇ ನೀಟಸಾಲಿನ ಒಂದು ಅಂಶವೂ ಇರುತ್ತದೆಯಷ್ಟೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಒಂದು ದತ್ತಸಾಲಿನ ಅಂಶಗಳ ಸರಳ ಉತ್ಪನ್ನವಾಗಿ ನಿರ್ಧಾರಕದ ವಿಸ್ತರಣೆಯನ್ನು ಬರೆಯಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗಬೇಕು. ಎಂದರೆ ಮೇಲಿನ ನಿರ್ಧಾರಕಕ್ಕೆ,

$$\begin{aligned} D &= a_1 A_1 + b_1 B_1 + c_1 C_1 + d_1 D_1 \\ &= a_2 A_2 + b_2 B_2 + c_2 C_2 + d_2 D_2 \\ &= a_3 A_3 + b_3 B_3 + c_3 C_3 + d_3 D_3 \\ &= a_4 A_4 + b_4 B_4 + c_4 C_4 + d_4 D_4 \end{aligned}$$

The coefficients of a_1, b_1 c_1, $\cdots$ are called their respective *cofactors*. The cofactor of a_1 is A_1, the cofactor of b_3 is B_3, etc.

We shall now obtain the values of these cofactors.
Now $D = \Sigma \pm a_i\, b_j\, c_k$ ...... Therefore, to obtain A_1, we take $i=1$, and write down all terms containing a_1.

$$\therefore\ a_1 A_1 = a_1 \Sigma \pm b_j\, c_k \cdots\cdots,\ (j = 2, 3, \cdots)$$

$$= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 & b_4 \\ c_2 & c_3 & c_4 \\ d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} \text{ by the definition of}$$

a determinant.

$$\therefore A_1 = \begin{vmatrix} b_2 & b_3 & b_4 \\ c_2 & c_3 & c_4 \\ d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} = \text{the minor of } a_1.$$

To obtain B_1, we must first bring b_1 to the first place. This is done by transposing the first two columns. We then obtain the co-efficient of b_1 as before. But after making the transposition, the determinant becomes $-D_1$. Hence the co-efficient obtained must be multiplied by -1, in order to give the cofactor of b_1.

$$\therefore B_1 = - \begin{vmatrix} a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = - \text{ (the minor of } b_1)$$

Similarly to obtain C_1, the first and the third columns must be interchanged. We easily see that

$$C_1 = \text{the minor of } c_1$$

Similarly $D_1 = -$ (the minor of d_1).

Hence,

$$D = (a_1 \cdot \text{the minor of } a_1) - (b_1 \cdot \text{the minor of } b_1)$$
$$+ (c_1 \cdot \text{the minor of } c_1) - (d_1 \cdot \text{the minor of } d_1)$$
$$= (a_2 \cdot \text{the minor of } a_2) - (b_2 \cdot \text{the minor of } b_2)$$
$$+ c_2 \cdot (\text{the minor of } c_2) - (d_2 \cdot \text{the minor of } d_2)$$

and so on.

ಎಂಬ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ D ನ್ನು ವಿಸ್ತರಿಸಬಹುದು. $a_1, b_1, c_1, \ldots$ ಮುಂತಾದುವುಗಳ ಗುಣಕಗಳನ್ನು ಅವುಗಳ **ಸಹಗುಣಕಗಳು** ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. a_1 ನ ಸಹಗುಣಕ A_1, b_3 ಯ ಸಹಗುಣಕ B_3, ಇತ್ಯಾದಿ.

ಈ ಸಹಗುಣಕಗಳ ಬೆಲೆಯನ್ನೀಗ ಪಡೆಯುವೆವು.

$D=\Sigma \pm a_i b_j c_k \ldots$ ಆದ್ದರಿಂದ, A_1 ಪಡೆಯಲು $i=1$ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಂಡು, a_1 ಇರುವ ಪದಗಳನ್ನೆಲ್ಲಾ ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

$$a_1 A_1 = a_1 \Sigma \pm b_j c_k \cdots, (j=2, 3, \ldots)$$

$$= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 & b_4 \\ c_2 & c_3 & c_4 \\ d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix}$$, ನಿರ್ಧಾರಕದ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯಂತೆ

ಆದ್ದರಿಂದ, $A_1 = \begin{vmatrix} b_2 & b_3 & b_4 \\ c_2 & c_3 & c_4 \\ d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} =$ a_1ನ ಲಘು

B_1 ಪಡೆಯಲು, ಮೊದಲು b_1ನ್ನು ಪ್ರಥಮ ಸ್ಥಾನಕ್ಕೆ ತರಬೇಕು. ಮೊದಲನೆಯ, ಎರಡನೆಯ ನೀಟುಸಾಲುಗಳನ್ನು ಅದಲುಬದಲು ಮಾಡಿದರೆ, b_1 ಪ್ರಥಮ ಸ್ಥಾನಕ್ಕೆ ಬರುತ್ತದೆ. ಅನಂತರ b_1ನ ಗುಣಕವನ್ನು ಮೇಲಿನಂತೆಯೇ ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ. ಆದರೆ ಅದಲುಬದಲು ಮಾಡಿದ ಮೇಲೆ, ನಿರ್ಧಾರಕವು $-D_1$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ b_1ನ ಸಹಗುಣಕ B_1ನ್ನು ಪಡೆಯಲು, ಹೀಗೆ ಬಂದ ಗುಣಕವನ್ನು -1 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಬೇಕು.

$$B_1 = -\begin{vmatrix} a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

ಲಘುವಿನ ವ್ಯಾಖ್ಯೆ (6.7) ಯಂತೆ, $B_1 = -(b_1$ನ ಲಘು). ಹೀಗೆಯೇ C_1 ಪಡೆಯಲು, ಮೊದಲನೆಯ ಮೂರನೆಯ ನೀಟುಸಾಲುಗಳನ್ನು ಅದಲುಬದಲು ಮಾಡಬೇಕು.

$C_1 = c_1$ನ ಲಘು ಎಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗುತ್ತದೆ.

ಹೀಗೆಯೇ $D_1 = -(d_1$ನ ಲಘು).

ಆದ್ದರಿಂದ, $D = a_1$ (a_1ನ ಲಘು) $- b_1$(b_1 ನ ಲಘು) $+ c_1$ (c_1ನ ಲಘು)
$-d_1$(d_1ನ ಲಘು) $= a_2$ (a_2ನ ಲಘು) $- b_2$ (b_2ನ ಲಘು).
$+c_2$ (c_2ನ ಲಘು) $-d_2$(d_2ನ ಲಘು) ಇತ್ಯಾದಿ.

In a similar manner, D can be expanded as a linear function of the elements of the columns.

$$D = a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3 + a_4 A_4$$
$$= (a_1 \cdot \text{the minor of } a_1) - (a_2 \cdot \text{the minor of } a_2)$$
$$+ (a_3 \cdot \text{the minor of } a_3) - (a_4 \cdot \text{the minor of } a_4).$$

Similarly

$$D = b_1 B_1 + b_2 B_2 + b_3 B_3 + b_4 B_4$$
$$= c_1 C_1 + c_2 C_2 + c_3 C_3 + c_4 C_4$$
$$= d_1 D_1 + d_2 D_2 + d_3 D_3 + d_4 D_4.$$

6.9. We shall now write down the expansion of any determinant of the fourth order, by the help of the minors.

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

$$= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

$$+ c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & d_4 \end{vmatrix} - d_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix}$$

If we are required to expand in terms of the second row, it must be brought to the first place.

$$\therefore D = -\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} \qquad \text{(Theorem 3)}$$

This can now be expanded in terms of the first row, as above. Similarly for columns.

ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ, ನೀಟುಸಾಲುಗಳ ಅಂಶಗಳ ಸರಳ ಉತ್ಪನ್ನವಾಗಿಯೂ Dನ್ನು ವಿಸ್ತರಿಸಬಹುದು.

$$D = a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3 + a_4 A_4$$
$$= a_1 (a_1\text{ನ ಲಘು}) - a_2 (a_2\text{ನ ಲಘು}) + a_3 (a_3\text{ನ ಲಘು}) - a_4 (a_4\text{ನ ಲಘು})$$

ಹೀಗೆಯೇ $D = b_1 B_1 + b_2 B_2 + b_3 B_3 + b_4 B_4$
$$= c_1 C_1 + c_2 C_2 + c_3 C_3 + c_4 C_4$$
$$= d_1 D_1 + d_2 D_2 + d_3 D_3 + d_4 D_4$$

6.9. ಲಘುಗಳ ಉತ್ಪತ್ತಿಯನ್ನು ಗಮನಿಸಿ, ಈಗ ಯಾವುದೇ ನಾಲ್ಕನೆಯ ಪ್ರಮಾಣದ ನಿರ್ಧಾರಕದ ವಿಸ್ತರಣೆಯನ್ನು ಬರೆಯೋಣ.

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

$$= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & d_4 \end{vmatrix}$$
$$- d_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix}$$

ಎರಡನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲಿನ ಮೂಲಕ ವಿಸ್ತರಿಸಬೇಕಾದರೆ, ಅದನ್ನು ಮೊದಲು ಮೊದಲನೆಯ ಸಾಲಿಗೆ ತಂದುಕೊಳ್ಳಬೇಕು.

$$\therefore D = - \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} \quad (\text{ಪ್ರಮೇಯ } 3)$$

ಈಗ ಮೇಲಿನಂತೆಯೇ ಮೊದಲನೆಯ ಸಾಲಿನ ಉತ್ಪನ್ನವಾಗಿ ವಿಸ್ತರಿಸಬಹುದು.

ಹೀಗೆಯೇ ನೀಟು ಸಾಲುಗಳಿಗೂ.

6.10. Now, what is the value of

$$a_2 A_1 + b_2 B_1 + c_2 C_1 + d_2 D_1 ?$$

We obtain this expression, by writing a_2, b_2, c_2, d_2 for a_1, b_1, c_1, d_1 in the expansion of D given in 6.8.

$$\therefore a_2 A_1 + b_2 B_1 + c_2 C_1 + d_2 D_1 = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

This vanishes, since two rows are identical. (Theorem 4)
Similarly $a_3 A_1 + b_3 B_1 + c_3 C_1 + d_3 D_1 = 0$, and so on.

To summarise: *If the elements of a row (or column) are multiplied by their corresponding cofactors and added, the sum obtained is D. If the elements of a row (column) are multiplied by the cofactors of the elements of another row (column), their sum is zero.*

Thus, $a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3 + a_4 A_4 = D$

$$a_1 B_1 + a_2 B_2 + a_3 B_3 + a_4 B_4 = 0$$

$$a_1 C_1 + a_2 C_2 + a_3 C_3 + a_4 C_4 = 0$$

and so on.

6.9. Theorem 7. *If every element of a row (or column) is the sum of two elements, the determinant can be expressed as the sum of two determinants.*

For example, let the elements of the first column be $a_1 + \alpha_1, a_2 + \alpha_2, a_3 + \alpha_3, a_4 + \alpha_4$.

$$\therefore D = \begin{vmatrix} a_1 + \alpha_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 + \alpha_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 + \alpha_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 + \alpha_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

By the rule for expansion, explained in 6.8,

6.10. ಈಗ $a_2 A_1+b_2 B_1+c_2 C_1+d_2 D_1$ ಎಂಬುದರ ಬೆಲೆಯೇನು ?

6.8 ರಲ್ಲಿ D ಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ವಿಸ್ತರಣೆಯಲ್ಲಿ a_1, b_1, c_1, d_1 ಗೆ ಬದಲು a_2, b_2, c_2, d_2 ಬರೆಯುವುದರಿಂದ ಈ ಉಕ್ತಿ ದೊರಕುತ್ತದೆ.

$$\therefore \quad a_2A_1+b_2B_1+c_2C_1+d_2D_1 = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

ಎರಡು ಸಾಲುಗಳು ಒಂದೇ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, ಇದರ ಬೆಲೆ ಸೊನ್ನೆ (ಪ್ರಮೇಯ–4).

ಹೀಗೆಯೇ $a_3A_1+b_3B_1+c_3C_1+d_3D_1=0$, ಇತ್ಯಾದಿ.

ಒಟ್ಟಿನಲ್ಲಿ, ಒಂದು ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ (ಅಡ್ಡ ಅಥವಾ ನೀಟು) ಇರುವ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಅವುಗಳ ಸಹಗುಣಕಗಳಿಂದ ಗುಣಿಸಿ ಪಡೆಯುವ ಮೊತ್ತ D; ಒಂದು ಸಾಲಿನಲ್ಲಿರುವ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಬೇರೊಂದು ಸಾಲಿನ ಸಹಗುಣಕಗಳಿಂದ ಗುಣಿಸಿ ಪಡೆಯುವ ಮೊತ್ತ 0.

$$a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3 + a_4 A_4 = D$$
$$a_1 B_1 + a_2 B_2 + a_3 B_3 + a_4 B_4 = 0$$
$$a_1 C_1 + a_2 C_2 + a_3 C_3 + a_4 C_4 = 0$$

ಇತ್ಯಾದಿ.

6.9. **ಪ್ರಮೇಯ 7.** ಒಂದು ಸಾಲಿನ (ಅಡ್ಡ ಅಥವಾ ನೀಟು) ಪ್ರತಿ ಅಂಶವೂ ಎರಡು ಅಂಶಗಳ ಮೊತ್ತವಾಗಿದ್ದರೆ, ನಿರ್ಧಾರಕವನ್ನು ಎರಡು ನಿರ್ಧಾರಕಗಳ ಮೊತ್ತವಾಗಿ ಹಿರಿಯಬಹುದು,

ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ, ಮೊದಲನೆಯ ನೀಟುಸಾಲಿನ ಅಂಶಗಳು $a_1 + \alpha_1$ $a_2 + \alpha_2$, $a_3 + \alpha_3$, $a_4 + \alpha_4$ ಆಗಿರಲಿ.

$$D = \begin{vmatrix} a_1+\alpha_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2+\alpha_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3+\alpha_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4+\alpha_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

6.8 ರಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ವಿಸ್ತರಣೆಯ ಕ್ರಮದಂತೆ,

$$D = (a_1 + \alpha_1) A_1 + (a_2 + \alpha_2) A_2 + (a_3 + \alpha_3) A_3 + (a_4 + \alpha_4) A_4$$

$$= (a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3 + a_4A_4) + (\alpha_1A_1 + \alpha_2A_2 + \alpha_3A_3 + \alpha_4A_4)$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ \alpha_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ \alpha_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ \alpha_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

Similarly,

$$\begin{vmatrix} a_1 + \alpha & a_2 + \beta & a_3 + \gamma & a_4 + \delta \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix}$$

This principle is some times called the "Addition of Determinants."

6.10. As a corollary of the above theorem, we have Theorem 8. *The value of a determinant is unaltered, by adding to any row (or column) multiples of another row (column) or rows (columns).*

Ex: $D=$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 + ka_2 & b_1 + kb_2 & c_1 + kc_2 & d_1 + kd_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

$$D=(a_1+\alpha_1)A_1+(a_2+\alpha_2)A_2+(a_3+\alpha_3)A_3+(a_4+\alpha_4)A_4$$

$$=(a_1A_1+a_2A_2+a_3A_3+a_4A_4)+(\alpha_1A_1+\alpha_2A_2+\alpha_3A_3+\alpha_4A_4)$$

$$=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} \alpha_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ \alpha_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ \alpha_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ \alpha_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ,

$$\begin{vmatrix} a_1+\alpha & a_2+\beta & a_3+\gamma & a_4+\delta \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ b_1 & b_2 & b_5 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_4 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix}$$

ಈ ತತ್ವವನ್ನು ನಿರ್ಧಾರಕಗಳ ಸಂಕಲನ ಎಂದು ಕರೆಯುವುದುಂಟು,

6.10 ಮೇಲಿನ ಪ್ರಮೇಯದ ಅನುಮಿತವಾಗಿ

ಪ್ರಮೇಯ 8. ಒಂದು ನಿರ್ಧಾರಕದಲ್ಲಿ, ಯಾವುದೇ ಸಾಲಿಗೆ (ಅಡ್ಡ ಅಥವಾ ನೀಟು) ಮತ್ತೊಂದು ಸಾಲಿನ ಅಥವಾ ಸಾಲುಗಳ ಗುಣಕಗಳನ್ನು ಸಂಕಲನ ಮಾಡುವುದರಿಂದ, ನಿರ್ಧಾರಕದ ಬೆಲೆ ವ್ಯತ್ಯಾಸಗೊಳ್ಳುವುದಿಲ್ಲ.

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1+ka_2 & b_1+kb_2 & c_1+kc_2 & d_1+kd_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

For, the determinant on the right

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

$$= D + 0 \quad (\text{Theorem } 4)$$

Similarly

$$D = \begin{vmatrix} a_1 + ka_2 + la_3 + ma_4 & b_1 + kb_2 + lb_3 + mb_4 & \ldots & \ldots \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

6.11. We shall now illustrate by examples, how all the above properties can be used to evaluate determinants.

(1) $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$-4 \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = [-1(4)+1(-1)+3(-10)] - 2\,[2(4)+1(-2)+3(0)]$$

$$+3\,[2(5) - 1(-2) + 3(1)] - 4\,[2(-1) + 1(-3) + 1(5)]$$

$$= -35 - 12 + 45 - 24 = -26.$$

ಏಕೆಂದರೆ, ಇಲ್ಲಿರುವ ಎರಡನೆಯ ನಿರ್ಧಾರಕ

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

$= D + 0$ (ಪ್ರಮೇಯ 4)

ಹೀಗೆಯೇ,

$$D = \begin{vmatrix} a_1 + ka_2 + la_3 + ma_4 \cdot & b_1 + kb_2 + lb_3 + mb_4 & \dots & \dots \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

6.11. ಈ ಎಲ್ಲ ಗುಣಗಳನ್ನೂ ಉಪಯೋಗಿಸಿ, ನಿರ್ಧಾರಕಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ಪಡೆಯಬಹುದೆಂಬುದನ್ನು ಉದಾಹರಿಸುವೆವು.

(1) $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$-4 \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = [-1\,(4) \cdot +1\,(-1) + 3\,(-10)] \\ -2\,[2\,(4) + 1\,(-2) + 3\,(0)]$$

$$+3\,[2(5) - 1(-2) + 3(1) - 4[2(-1) - 1(-3) + 1\,(5)]$$
$$= \; -35 - 12 + 45 - 24 = -26.$$

This is the direct method. The determinant could also be expanded, by first subtracting the first row from the third, adding the first row to the fourth, and then expanding in terms of the first column. Various artifies are possible in many problems.

(2)

$$D = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

Add the first row to each of the others.

$$\therefore \quad D = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

Expand in terms of the first column.

$$\therefore \quad D = -\begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -[\,2(4) + 2(4)\,] = -16.$$

(3)

$$D = \begin{vmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 & 5^2 \\ 3^2 & 4^2 & 5^2 & 6^2 \\ 4^2 & 5^2 & 6^2 & 7^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \\ 9 & 16 & 25 & 36 \\ 16 & 25 & 36 & 49 \end{vmatrix}$$

Subtract from each row the previous row.

$$\therefore \quad D = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 11 \\ 7 & 9 & 11 & 13 \end{vmatrix}$$

ಇದು ನೇರವಾದ ವಿಧಾನ ಮೂರನೆಯ ಅಡ್ಡಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ಮೊದಲನೆಯದನ್ನು ಕಳೆದು ಬಂದುದನ್ನು ಮೂರನೆಯ ಅಡ್ಡಸಾಲಾಗಿಯೂ, ನಾಲ್ಕನೆಯದಕ್ಕೆ ಮೊದಲನೆಯದನ್ನು ಸೇರಿಸಿಯೂ ಬರೆದು, ನಿರ್ಧಾರಕವನ್ನು ಮೊದಲನೆಯ ನೀಟು ಸಾಲಿನ ಮೂಲಕ ವಿಸ್ತರಿಸಬಹುದು. ಹೀಗೆ ನಾನಾ ವಿಧದ ಉಪಾಯಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು.

(2)
$$D=\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

ಎರಡನೆಯ ಸಾಲಿಗೆ ಮೊದಲನೆಯದನ್ನು ಸೇರಿಸಿರಿ. ಹೀಗೆಯೇ ಮೂರನೆಯ ಸಾಲಿಗೂ ನಾಲ್ಕನೆಯದಕ್ಕೂ.

$$D=\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

ಮೊದಲನೆಯ ನೀಟು ಸಾಲಿನ ಮೂಲಕ ವಿಸ್ತರಿಸಿರಿ.

$$D=-\begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -[2(4)+2(4)] = -16.$$

(3)
$$D=\begin{vmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 & 5^2 \\ 3^2 & 4^2 & 5^2 & 6^2 \\ 4^2 & 5^2 & 6^2 & 7^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \\ 9 & 16 & 25 & 36 \\ 16 & 25 & 36 & 49 \end{vmatrix}$$

ಪ್ರತಿ ಅಡ್ಡಸಾಲಿನಿಂದಲೂ ಹಿಂದಿನ ಸಾಲನ್ನು ಕಳೆಯಿರಿ

$$\therefore\ D = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 11 \\ 7 & 9 & 11 & 13 \end{vmatrix}$$

Subtract from the third and fourth row, the previous row.

$$\therefore \quad D = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

(4) What is the value of $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 3 & 10 \\ 2 & 7 & 9 & 5 \\ 3 & -1 & 2 & -3 \\ 17 & 0 & 15 & 0 \end{vmatrix}$?

Since there are two zeros in the last row, it is easy to expand in terms of the last row. Bringing this to the first place,

$$D = -\begin{vmatrix} 17 & 0 & 15 & 0 \\ 5 & 6 & 3 & 10 \\ 2 & 7 & 9 & 5 \\ 3 & -1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -17 \begin{vmatrix} 6 & 3 & 10 \\ 7 & 9 & 5 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix} - 15 \begin{vmatrix} 5 & 6 & 10 \\ 2 & 7 & 5 \\ 3 & -1 & -3 \end{vmatrix}$$

Proceed.

(5) $$\begin{vmatrix} 7 & 2 & 5 & 8 \\ 1 & 3 & 1 & 6 \\ 4 & 5 & 4 & 3 \\ 5 & 7 & 5 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 5 & 8 \\ 0 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & 5 & 4 & 3 \\ 0 & 7 & 5 & 9 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 5 & 4 & 3 \\ 7 & 5 & 9 \end{vmatrix}$$

(6) Expand :—

$$\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & h & g & l \\ h & b & f & m \\ g & f & c & n \\ l & m & n & 0 \end{vmatrix}.$$ (0 here is the number zero.)

(7) Show that $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \end{vmatrix} = (\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta)$

ಮೂರನೆಯ, ನಾಲ್ಕನೆಯ ಸಾಲುಗಳಿಂದ ಹಿಂದಿನ ಸಾಲನ್ನು ಕಳೆಯಿರಿ.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

(4) $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 3 & 10 \\ 2 & 7 & 9 & 5 \\ 3 & -1 & 2 & -3 \\ 17 & 0 & 15 & 0 \end{vmatrix}$ ಇದರ ಬೆಲೆ ಏನು ?

ಕಡೆಯ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ಎರಡು ಸೊನ್ನೆಗಳಿರುವುದರಿಂದ, ಕಡೆಯ ಸಾಲಿನ ಮೂಲಕ ವಿಸ್ತರಿಸುವುದು ಸುಲಭ. ಕಡೆಯ ಸಾಲನ್ನು ಮೊದಲಿಗೆ ತಂದರೆ,

$$D = -\begin{vmatrix} 17 & 0 & 15 & 0 \\ 5 & 6 & 3 & 10 \\ 2 & 7 & 9 & 5 \\ 3 & -1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -17 \begin{vmatrix} 6 & 3 & 10 \\ 7 & 9 & 5 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix} -15 \begin{vmatrix} 5 & 6 & 10 \\ 2 & 7 & 5 \\ 3 & -1 & -3 \end{vmatrix}$$

ಮುಂದುವರಿಸಿ.

(5) $\begin{vmatrix} 7 & 2 & 5 & 8 \\ 1 & 3 & 1 & 6 \\ 4 & 5 & 4 & 3 \\ 5 & 7 & 5 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 5 & 8 \\ 0 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & 5 & 4 & 3 \\ 0 & 7 & 5 & 9 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 5 & 4 & 3 \\ 7 & 5 & 9 \end{vmatrix}$

(6) ವಿಸ್ತರಿಸಿ :

$$\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & h & g & l \\ h & b & f & m \\ g & f & c & n \\ l & m & n & 0 \end{vmatrix}$$ (ಇಲ್ಲಿ 0=ಸೊನ್ನೆ)

(7) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \end{vmatrix} = (\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta)$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

Treat the determinant as a function $f(\alpha)$ of the variable α. We have by the Remainder Theorem that if $f(a)=0$, $x-a$ is a factor of $f(x)$. Here put $\alpha=\beta$. Two columns become identical, and hence the determinant vanishes, *i.e.* $f(\beta)=0$. $\therefore$ $\alpha-\beta$ is a factor. Similarly $\alpha-\gamma$ is a factor. By taking β as the variable, we similarly obtain the factor $\beta-\gamma$. Hence $\alpha-\beta$, $\beta-\gamma$, $\gamma-\alpha$ are all factors. But the determinant is of the third degree in α, β, γ. Hence there cannot be any other factor except a constant.

$$\therefore \quad \text{determinant} = k(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)$$

To obtain the value of k, the principal diagonal of the determinant gives the term $\beta\gamma^2$. To get this term on the right side, we must take $-\beta$ from the first bracket, $-\gamma$ from the second and γ from the third.

$$\therefore \beta\gamma^2 = k(-\beta)(-\gamma)(\gamma) \qquad \therefore k=1.$$

(8) Similarly.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 & \delta^2 \\ \alpha^3 & \beta^3 & \gamma^3 & \delta^3 \end{vmatrix} = -(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta)(\alpha-\delta)(\beta-\delta)(\gamma-\delta)$$

$$= -\prod(\alpha-\beta), \text{ briefly}$$

Exercises 6.1

1. Evaluate $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$

Add the second row to the first. Add the second row to the fourth. The first column will now have three elements as zero. Now proceed. Remember that *while making such changes, the original row remains absolutely unaltered.* The original row here was taken as the second row.

ನಿರ್ಧಾರಕವನ್ನು α ಎಂಬ ಚರಸಂಖ್ಯೆಯ ಉತ್ಪನ್ನ $f(\alpha)$ ಎಂದು ಭಾವಿಸಿ. $f(a)=0$ ಆದಾಗ, $f(x)$ ಗೆ $x-a$ ಒಂದು ಅಪವರ್ತನ ಎಂದು ತಿಳಿದಿದ್ದೀರಿ, (ಶೇಷಪ್ರಮೇಯದಿಂದ). ಇಲ್ಲಿ $\alpha=\beta$ ಹಾಕಿದರೆ ಎರಡು ನೀಟು ಸಾಲುಗಳು ಒಂದೇ ಆಗುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ನಿರ್ಧಾರಕದ ಬೆಲೆ, ಎಂದರೆ $f(\beta)$, ಸೊನ್ನೆ ಆಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $\alpha-\beta$ ಒಂದು ಅಪವರ್ತನ, ಹೀಗೆಯೇ $\alpha-\gamma$ ಒಂದು ಅಪವರ್ತನ. ಈಗ ಚರಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು β ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, ಹೀಗೆಯೇ $\beta-\gamma$ ಅಪವರ್ತನ

$\therefore$ $\alpha,-\beta$, $\beta-\gamma$, $\gamma-\alpha$ ಮೂರೂ ಅಪವರ್ತನಗಳು ಕೊಟ್ಟಿರುವ ನಿರ್ಧಾರಕವು α,β,γ ಗಳಲ್ಲಿ ಮೂರನೆಯ ಪ್ರಮಾಣದ್ದು.

$\therefore$ ಸ್ಥಿರ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಹೊರತು, ಬೇರೆ ಯಾವ ಅಪವರ್ತನವೂ ಇಲ್ಲ.

$\therefore$ ನಿರ್ಧಾರಕ $= k(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)$

k ಯ ಬೆಲೆ ಪಡೆಯಲು, ನಿರ್ಧಾರಕದಲ್ಲಿ ಪ್ರಧಾನಕರ್ಣವು $\beta\gamma^2$ ಎಂಬ ಪದವನ್ನು ಕೊಡುತ್ತದೆ. ಬಲಗಡೆ ಈ ಪದ ಬರಬೇಕಾದರೆ, ಮೊದಲನೆಯ ಆವರಣದ $-\beta$, ಎರಡನೆಯದರಲ್ಲಿ $-\gamma$, ಮೂರನೆಯದರಲ್ಲಿ γ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಗುಣಿಸಬೇಕು.

$\therefore \beta\gamma^2 = k(-\beta)(-\gamma)(\gamma) \qquad \therefore \; k=1.$

(8) ಹೀಗೆಯೇ

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 & \delta^2 \\ \alpha^3 & \beta^3 & \gamma^3 & \delta^3 \end{vmatrix} = -(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta)(\alpha-\delta)(\beta-\delta)(\gamma-\delta)$$

$=$ಸಂಕ್ಷೇಪವಾಗಿ $-\pi(\alpha-\beta)$

ಅಭ್ಯಾಸ 1

1. $$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$ ಇದರ ಬೆಲೆ ಏನು ?

ಮೊದಲನೆಯ ಅಡ್ಡಸಾಲಿಗೆ ಎರಡನೆಯದನ್ನು ಕೂಡಿ ಬರೆಯಿರಿ. 4ನೆಯ ಅಡ್ಡಸಾಲಿಗೆ ಎರಡನೆಯದನ್ನು ಕೂಡಿ ಈಗ ಮೊದಲನೆಯ ನೀಟುಸಾಲಿನಲ್ಲಿ, ಮೂರು ಅಂಶಗಳು ಸೊನ್ನೆಯಾಗುತ್ತವೆ. ಮುಂದುವರಿಸಿ. ಇಂಥ ಪರಿವರ್ತನೆಗಳಲ್ಲಿ, **ನಾವು ಆಧಾರವಾಗಿಟ್ಟುಕೊಂಡ ಸಾಲು ಸ್ವಲ್ಪವೂ ಬದಲಾಗಕೂಡದೆಂದು ನೆನಪಿನಲ್ಲಿಡಿ.** ಇಲ್ಲಿ ಆಧಾರವಾದ ಸಾಲು ಎರಡನೆಯಸಾಲು.

If the student is unable to find such artifices, he can directly expand as in 6.11 (1).

2. Evaluate $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$

3. $\begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 & a^2 \\ b^2 & (c+a)^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix} = 2\,abc\,(a+b+c)^3.$

Subtract the first column from the other two. The factor $a+b+c$ will appear in the second and third columns.

Thus,

$$D = \begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2-(b+c)^2 & a^2-(b+c)^2 \\ b^2 & (c+a)^2-b^2 & 0 \\ c^2 & 0 & (a+b)^2-c^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} (b+c)^2 & a-b-c & a-b-c \\ b^2 & c+a-b & 0 \\ c^2 & 0 & a+b-c \end{vmatrix} (a+b+c)^2$$

Add the second and third rows, and subtract from the first.

$$\therefore \quad D = \begin{vmatrix} 2\,bc & -2\,c & -2\,b \\ b^2 & c+a-b & 0 \\ c^2 & 0 & a+b-c \end{vmatrix} (a+b+c)^2$$

Add the first column to the second multiplied by b. Similarly add the first column to the third multiplied by c. But in order not to alter the value of the determinant, it must be divided outside by bc.

$$\therefore \quad D = \frac{2(a+b+c)^2}{bc} \begin{vmatrix} bc & 0 & 0 \\ b^2 & b(c+a) & b^2 \\ c^2 & c^2 & c(a+b) \end{vmatrix}$$

ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗೆ ಇಂತಹ ಉಪಾಯಗಳು ಹೊಳೆಯದಿದ್ದರೆ, ನೇರವಾಗಿ 6.11 (1) ರಲ್ಲಿ ಮಾಡಿದಂತೆ, ಲೆಕ್ಕಮಾಡಲಿ.

2. $$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$ ಇದರ ಬೆಲೆ ಏನು ?

3. $$D=\begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 & a^2 \\ b^2 & (c+a)^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix} = 2abc\,(a+b+c)^3.$$

ಮೊದಲನೆಯ ನೀಟುಸಾಲನ್ನು ಎರಡನೆಯ ಮೂರನೆಯ ಸಾಲುಗಳಿಂದ ಕಳೆಯಿರಿ. ಎರಡನೇ ಮೂರನೇ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ $a+b+c$ ಅಪವರ್ತನ ಸಿಗುತ್ತದೆ.

$$\therefore\quad D=\begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2-(b+c)^2 & a^2-(b+c)^2 \\ b^2 & (c+a)^2-b^2 & 0 \\ c^2 & 0 & (a+b)^2-c^2 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} (b+c)^2 & a-b-c & a-b-c \\ b^2 & c+a-b & 0 \\ c^2 & 0 & a+b-c \end{vmatrix}(a+b+c)^2$$

ಇದರಲ್ಲಿ, ಎರಡನೇ ಮೂರನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲುಗಳನ್ನು ಕೂಡಿ ಮೊದಲನೆಯದರಿಂದ ಕಳೆಯಿರಿ.

$$\therefore D=\begin{vmatrix} 2bc & -2c & -2b \\ b^2 & c+a-b & 0 \\ c^2 & 0 & a+b-c \end{vmatrix}(a+b+c)^2$$

ಎರಡನೆಯ ನೀಟು ಸಾಲನ್ನು bಯಿಂದ ಗುಣಿಸಿ, ಇದಕ್ಕೆ ಮೊದಲನೆಯ ನೀಟು ಸಾಲು ಸೇರಿಸಿ. ಹೀಗೆಯೇ ಮೂರನೆಯ ನೀಟು ಸಾಲನ್ನು c ಇಂದ. Dಯ ಬೆಲೆ ವ್ಯತ್ಯಾಸವಾಗದಂತೆ, ಹೊರಗಡೆ bc ಇಂದ ಭಾಗಿಸಬೇಕು.

$$\therefore\quad D = \frac{2(a+b+c)^2}{bc}\begin{vmatrix} bc & 0 & 0 \\ b^2 & b(c+a) & b^2 \\ c^2 & c & c(a+b) \end{vmatrix}$$

$$= \frac{2(a+b+c)^2}{bc} . \quad bc. [bc(c+a)(a+b) - b^2 c^2]$$

$$= 2abc(a+b+c)^3$$

Prove the following :—

4. $$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & 0 \\ 0 & 1 & a & a^2 \\ a^2 & 0 & 1 & a \\ a & a^2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + a^4 + a^8$$

5. $$\begin{vmatrix} a & b & b & b \\ a & b & a & a \\ a & a & b & a \\ b & b & b & a \end{vmatrix} = -(a-b)^4$$

6. $$\begin{vmatrix} x & l & m & 1 \\ \alpha & x & n & 1 \\ \alpha & \beta & x & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma & 1 \end{vmatrix} = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma).$$

[∴ The value is independent of l, m, n]

7. $$\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+a_4 \end{vmatrix} = a_1 a_2 a_3 a_4 \left(1 + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4}\right)$$

8. $$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & b \\ -d & -c & b & a \end{vmatrix} = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2$$

$$= \frac{2(a+b+c)^2}{bc} \cdot bc. \ [bc(c+a)(a+b) - b^2c^2]$$

$$= 2abc(a+b+c)^3.$$

ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಿ :

4. $$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & 0 \\ 0 & 1 & a & a^2 \\ a^2 & 0 & 1 & a \\ a & a^2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + a^4 + a^8$$

5. $$\begin{vmatrix} a & b & b & b \\ a & b & a & a \\ a & a & b & a \\ b & b & b & a \end{vmatrix} = -(a-b)^4$$

6. $$\begin{vmatrix} x & l & m & 1 \\ \alpha & x & n & 1 \\ \alpha & \beta & x & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma & 1 \end{vmatrix} = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma).$$

[∴ ಇದರ ಬೆಲೆ l, m, nಗಳನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸಿಯೇ ಇಲ್ಲ]

7. $$\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+a_4 \end{vmatrix} = a_1a_2a_3a_4 \left(1+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_4}\right)$$

8. $$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & b \\ -d & -c & b & a \end{vmatrix} = (a^2+b^2+c^2+d^2)^2$$

9.
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha^3 & \beta^3 & \gamma^3 \end{vmatrix} = (\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta)(\alpha+\beta+\gamma)$$

10.
$$\begin{vmatrix} x^3 & x^2 & x & 1 \\ \alpha^3 & \alpha^2 & \alpha & 1 \\ \beta^3 & \beta^2 & \beta & 1 \\ \gamma^3 & \gamma^2 & \gamma & 1 \end{vmatrix} = -(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta)(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$$

(See Ex. 8, 6.11).

By comparing the coefficients of x on both sides, show that

$$\begin{vmatrix} \alpha^3 & \alpha^2 & 1 \\ \beta^3 & \beta^2 & 1 \\ \gamma^3 & \gamma^2 & 1 \end{vmatrix} = -(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta)(\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta).$$

11.
$$\begin{vmatrix} b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \\ b_3+c_3 & c_3+a_3 & a_3+b_3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

(Use 6.9)

12.
$$\begin{vmatrix} \beta^2\gamma^2+\alpha^2\delta^2 & \beta\gamma+\alpha\delta & 1 \\ \gamma^2\alpha^2+\beta^2\delta^2 & \gamma\alpha+\beta\delta & 1 \\ \alpha^2\beta^2+\gamma^2\delta^2 & \alpha\beta+\gamma\delta & 1 \end{vmatrix} = (\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta)(\alpha-\delta)(\beta-\delta)(\gamma-\delta)$$

Multiply the last column by $2\alpha\beta\gamma\delta$, and add it to the first column. Now use 6.11 (7)

13.
$$\begin{vmatrix} \alpha & x & x & x \\ x & \beta & x & x \\ x & x & \gamma & x \\ x & x & x & \delta \end{vmatrix} = f(x) - x f'(x),$$

where $f(x) = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)$.

9. $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha^3 & \beta^3 & \gamma^3 \end{vmatrix} = (\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta)(\alpha+\beta+\gamma)$$

10. $$\begin{vmatrix} x^3 & x^2 & x & 1 \\ \alpha^3 & \alpha^2 & \alpha & 1 \\ \beta^3 & \beta^2 & \beta & 1 \\ \gamma^3 & \gamma^2 & \gamma & 1 \end{vmatrix} = -(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta)(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$$

[6.11, 8ನೇ ಉದಾಹರಣೆ ನೋಡಿ]

ಇದರಲ್ಲಿ ಎರಡು ಕಡೆಯೂ xನ ಗುಣಕಗಳನ್ನು ತೆಗೆದು,

$$\begin{vmatrix} \alpha^3 & \alpha^2 & 1 \\ \beta^3 & \beta^2 & 1 \\ \gamma^3 & \gamma^2 & 1 \end{vmatrix} = -(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta)(\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta)$$

ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

11. $$\begin{vmatrix} b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \\ b_3+c_3 & c_3+a_3 & a_3+b_3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

(6.9 ಉಪಯೋಗಿಸಿ)

12. $$\begin{vmatrix} \beta^2\gamma^2+\alpha^2\delta^2 & \beta\gamma+\alpha\delta & 1 \\ \gamma^2\alpha^2+\beta^2\delta^2 & \gamma\alpha+\beta\delta & 1 \\ \alpha^2\beta^2+\gamma^2\delta^2 & \alpha\beta+\gamma\delta & 1 \end{vmatrix} = (\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta)(\alpha-\delta)(\beta-\delta)(\gamma-\delta)$$

ಕಡೆಯ ನೀಟುಸಾಲನ್ನು $2\alpha\beta\gamma\delta$ ಇಂದ ಗುಣಿಸಿ ಮೊದಲಿನ ನೀಟು ಸಾಲಿಗೆ ಕೂಡಿ. 6.11 (7) ಉಪಯೋಗಿಸಿ.

13. $$\begin{vmatrix} \alpha & x & x & x \\ x & \beta & x & x \\ x & x & \gamma & x \\ x & x & x & \delta \end{vmatrix} = f(x) - x f'(x).$$

ಇಲ್ಲಿ $f(x) = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)$.

14. (Theorem). *If by putting $x = a$, r rows (or columns) of a determinant become equal, then $(x-a)^{r-1}$ is a factor of the determinant.*

Let
$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{vmatrix}$$

be a determinant, in which the elements are functions of x.

Let us suppose that the first two rows become identical when $x = a$. By subtracting the first row from the second, every term in the new second row will have $x—a$ as a factor. $\therefore$ $x—a$ is a factor of the determinant. Similarly if other rows become identical with the first row, when $x = a$.

15.
$$\begin{vmatrix} x & a & a & a \\ a & x & a & a \\ a & a & x & a \\ a & a & a & x \end{vmatrix} = (x-a)^3 (x + 3a).$$

$(x—a)^3$ is a factor, by Ex. 14. Adding all the rows, we get $x+3a$ as factor.

16.
$$\begin{vmatrix} x+a & b & c & d \\ a & x+b & c & d \\ a & b & x+c & d \\ a & b & c & x+d \end{vmatrix} = x^3(x+a+b+c+d).$$

17, Solve the equation
$$\begin{vmatrix} a+x & b+x & c+x \\ b+x & c+x & a+x \\ c+x & a+x & b+x \end{vmatrix} = 0.$$

14. (ಪ್ರಮೇಯು). ಒಂದು ನಿರ್ಧಾರಕದಲ್ಲಿ $x=a$ ಹಾಕಿದಾಗ, r ಸಾಲುಗಳು (ಅಡ್ಡ ಅಥವಾ ನೀಟು) ಒಂದೇ ಆದರೆ, $(x-a)^{r-1}$ ನಿರ್ಧಾರಕಕ್ಕೆ ಅಪವರ್ತನ.

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{vmatrix}$$ ಎಂಬ ನಿರ್ಧಾರಕದಲ್ಲಿ, ಅಂಶಗಳು x ನ ಉತ್ಪನ್ನಗಳಾಗಿರಲಿ.

$x=a$ ಹಾಕಿದಾಗ, ಮೊದಲನೆಯು ಎರಡು ಅಡ್ಡಸಾಲುಗಳು ಒಂದೇ ಆಗುತ್ತವೆ ಎನ್ನೋಣ. ಮೊದಲನೆಯ ಸಾಲನ್ನು ಎರಡನೆಯ ಸಾಲಿನಿಂದ ಕಳೆದರೆ, ಎರಡನೆಯು ಸಾಲಿನ ಪ್ರತಿ ಪದಕ್ಕೂ $x-a$ ಅಪವರ್ತನವಾಗುತ್ತದೆ. $\therefore$ $x-a$ ನಿರ್ಧಾರಕದ ಅಪವರ್ತನ. ಹೀಗೆಯೇ ಉಳಿದ ಸಾಲುಗಳೂ $x=a$ ಆದಾಗ ಮೊದಲನೆಯು ಸಾಲಿನೊಡನೆ ಒಂದೇ ಆದರೆ,

15. $$\begin{vmatrix} x & a & a & a \\ a & x & a & a \\ a & a & x & a \\ a & a & a & x \end{vmatrix} = (x-a)^3(x+3a)$$

ಉದಾ : 14 ರಿಂದ $(x-a)^3$ ಅಪವರ್ತನ. ಎಲ್ಲ ಸಾಲುಗಳನ್ನೂ ಕೂಡುವುದ ರಿಂದ, $x+3a$ ಅಪವರ್ತನ ಬರುತ್ತದೆ.

16. $$\begin{vmatrix} x+a & b & c & d \\ a & x+b & c & d \\ a & b & x+c & d \\ a & b & c & x+d \end{vmatrix} = x^3(x+a+b+c+d)$$

17. $$\begin{vmatrix} a+x & b+x & c+x \\ b+x & c+x & a+x \\ c+x & a+x & b+x \end{vmatrix} = 0$$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ.

6.12. *Elimination.* Let us try to solve the three equations

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z = 0$$

$$a_2 x + b_2 y + c_2 z = 0$$

$$a_3 x + b_3 y + c_3 z = 0,$$

where a_1, b_1, c_1 etc. are given numbers. The question is whether we can find values of x, y, z so as to satisfy all the three equations.

We call the cofactors of $a_1, b_1, \cdots$ in the determinant

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

, by the corresponding capital letters $A_1, B_1, \cdots\cdots$. Let us now multiply the above equations by A_1, A_2, A_3 respectively and add. By the properties of cofactors, we have

$$a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3 = D, \quad b_1 A_1 + b_2 A_2 + b_3 A_3 = 0,$$

$$c_1 A_1 + c_2 A_2 + c_3 A_3 = 0$$

$$\therefore \quad xD = 0.$$

Similarly, by multiplying by B_1, B_2, B_3 and adding, we get $y D = 0$. Similarly $z D = 0$.

Hence $D = 0$; or else $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

It is evident that $x = 0, y = 0$, $z = 0$ are solutions of the given equations. When $D \neq 0$, there are no other solutions. Therefore, if the equations possess non-trivial solutions, we must have $D = 0$. D is called the *eliminant* of the equations, and the process of getting it is called *elimination*. The equations are said to be *consistent* when the eliminant D vanishes.

When the equations are consistent, (any) one equation can be obtained by the help of the other two. In other words, only two of the equations will be independent. The values of x, y, z can be obtained from these.

6.12. ವಿಸರ್ಜನೆ.

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z = 0$$
$$a_2 x + b_2 y + c_2 z = 0$$
$$a_3 x + b_3 y + c_3 z = 0$$

ಎಂಬ ಮೂರು ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸುವ. ಇಲ್ಲಿ a_1, b_1, c_1 ಮುಂತಾದುವು ದತ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು. ಸಮೀಕರಣಗಳು ಸರಿಹೋಗುವಂತೆ x, y, zಗಳ ಬೆಲೆಗಳು ಇರಲು ಸಾಧ್ಯವೇ ಎಂಬುದು ಪ್ರಶ್ನೆ.

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

ಎಂಬ ನಿರ್ಧಾರಕದಲ್ಲಿ, a_1, b_1 ಮುಂತಾದಂವುಗಳ ಸಹಗುಣಕಗಳನ್ನು A_1, B_1 ಮುಂತಾಗಿ ಒರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಈಗ ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ A_1, A_2, A_3 ಇಂದ ಗುಣಿಸಿ ಕೂಡಿರಿ, ಸಹಗುಣಕಗಳ ಗುಣಗಳಿಂದ

$a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3 = D$, $b_1 A_1 + b_2 A_2 + b_3 A_3 = 0$, $c_1 A_1 + c_2 A_2 + c_3 A_3 = 0$

$$\therefore \quad x D = 0.$$

ಹೀಗೆಯೇ B_1, B_2, B_3 ಇಂದ ಗುಣಿಸಿ ಕೂಡಿದರೆ, $y D = 0$. ಹೀಗೆಯೇ $z D = 0$. ಆದ್ದರಿಂದ $D = 0$ ಆಗಿರಬೇಕು, ಇಲ್ಲದಿದ್ದರೆ $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$. $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, ಎಂಬುವು ಸಮೀಕರಣಗಳಿಗೆ ಮೂಲಗಳೆಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟ. $D \neq 0$ ಆದಾಗ, ಬೇರೆ ಮೂಲಗಳಿಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಸಮೀಕರಣಗಳಿಗೆ ಕ್ಷುಲ್ಲಕವಲ್ಲದ ಮೂಲಗಳಿರಬೇಕಾದರೆ, $D = 0$ ಆಗಿರಬೇಕು. Dನ್ನು ಸಮೀಕರಣಗಳ ವಿಸರ್ಜ್ಯ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಈ ವಿಧಾನಕ್ಕೆ ವಿಸರ್ಜನೆ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. $D = 0$ ಆದಾಗ, ಸಮೀಕರಣಗಳು ಸಮಂಜಸತೆಯನ್ನು ಪಡೆದಿವೆ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಸಮೀಕರಣಗಳು ಸಮಂಜಸತೆಯನ್ನು ಪಡೆದಿರುವಾಗ, ಒಂದು ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಇನ್ನೆರಡರಿಂದ ಪಡೆಯಲು ಸಾಧ್ಯ. ಎಂದರೆ, ಪರಸ್ಪರ ಸ್ವತಂತ್ರವಾಗಿರುವ ಎರಡು ಸಮೀಕರಣಗಳು ಮಾತ್ರ ಇರುತ್ತವೆ. ಇವುಗಳಿಂದ, x, y, z ಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು.

Thus, let $D=0$. Putting $\frac{x}{z}=x$, $\frac{y}{z}=y$, the first two equations become

$$a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$$

$$a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$$

$$\therefore x = \frac{b_1 c_2 - b_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}, \quad y = \frac{c_1 a_2 - c_2 a_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$$

$$\therefore x : y : z = b_1 c_2 - b_2 c_1 : c_1 a_2 - c_2 a_1 : a_1 b_2 - a_2 b_1$$

Satisfy all the three equations.

The theory underlying this will be dealt with at greater length in the next chapter.

The above are three homogeneous linear equations in x, y, z. We can arrive at a similar conclusion by considering n homogeneous equations in n unknowns.

If n unknowns (not all zero) are to satisfy n homogeneous linear equations, the determinant formed by their coefficients must vanish.

Ex:
$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 = 0$$

$$b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_4 x_4 = 0$$

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 + c_4 x_4 = 0$$

$$d_1 x_1 + d_2 x_2 + d_3 x_3 + d_4 x_4 = 0.$$

If these are consistent, then
$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} = 0.$$

6·13. Let us now take on the right hand side of the equations in 6.12, numbers other than zero. Now the equations are not homogeneous. The method of solving them is on the same lines as in 6.12

ಉದಾ : $D=0$ ಆದಾಗ, $\frac{x}{z}=X$, $\frac{y}{z}=Y$ ಎಂದುಹಾಕಿ, ಮೊದಲು ಎರಡು ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು $a_1X+b_1Y+c_1=0$

$a_2X+b_2Y+c_2=0$ ಎಂದು ಬರೆಯೋಣ.

$$\therefore \quad X = \frac{b_1 c_2 - b_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}, \quad Y = \frac{c_1 a_2 - c_2 a_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$$

$$\therefore \quad x : y : z = b_1 c_2 - b_2 c_1 : c_1 a_2 - c_2 a_1 : a_1 b_2 - a_2 b_1$$

ಇವೇ ಮೂಲಗಳು.

ಇದರ ಸಿದ್ಧಾಂತವನ್ನು ಮುಂದೆ ವಿಸ್ತರಿಸಿ ತಿಳಿಸಲಾಗುವುದು.

ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳು x, y, zನಲ್ಲಿ ಸಮಪ್ರಮಾಣದ ಸರಳ ಸಮೀಕರಣಗಳು. ಮೂರು ಸಮೀಕರಣಗಳಿಗೆ ಬದಲು, n ಅವ್ಯಕ್ತಗಳಲ್ಲಿ n ಸಮಪ್ರಮಾಣದ ಸರಳ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಕುರಿತು ಮೇಲಿನ ತೀರ್ಮಾನವನ್ನೇ ಪಡೆಯಬಹುದು.

n ಅವ್ಯಕ್ತಗಳು (ಎಲ್ಲವೂ ಸೊನ್ನೆಯಾಗದೆ) n ಸಮಪ್ರಮಾಣದ ಸರಳಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಸರಿದೂಗಿಸಬೇಕಾದರೆ, ಈ ಸಮೀಕರಣದ ಗುಣಕಗಳಿಂದುಂಟಾಗುವ ನಿರ್ಧಾರಕವು ಸೊನ್ನೆಯಾಗಬೇಕು.

ಉದಾ :
$$\begin{aligned} a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 &= 0 \\ b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_4 x_4 &= 0 \\ c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 + c_4 x_4 &= 0 \\ d_1 x_1 + d_2 x_2 + d_3 x_3 + d_4 x_4 &= 0 \end{aligned}$$

ಇವು ಸಮಂಜಸವಾಗಿದ್ದರೆ,
$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} = 0$$

6.13. 6.12 ರಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಿಸಿರುವ ಸಮೀಕರಣಗಳಲ್ಲಿ ಬಲಗಡೆ 0 ಗೆ ಬದಲು ಬೇರೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಈಗ ಸಮೀಕರಣಗಳು ಸಮ ಪ್ರಮಾಣದವು ಆಗುವುದಿಲ್ಲ. ಇವನ್ನು ಬಿಡಿಸುವ ವಿಧಾನವು 6.12 ರಲ್ಲಿ ತಿಳಿಸಿರುವ ವಿಧಾನದಂತೆಯೇ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

To solve the equations

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1$$

$$a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2$$

$$a_3 x + b_3 y + c_3 z = d_3$$

As in 6.12, we multiply the eqnations by A_1, A_2, A^3 respectively and add.

$\therefore \quad xD = d_1 A_1 + d_2 A_2 + d_3 A_3$

We obtain the expression $d_1 A_1 + d_2 A_2 + d_3 A_3$, if in $a_1 A_1 + c_2 A_2 + c_3 A_3$ we write d_1, d_2, d_3 in place of a_1, a_2, a_3.

$$\therefore \text{ Its value} = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\therefore x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Similarly,

$$y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix} \div D$$

$$z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} \div D.$$

The solutions are consistent only when $D \neq 0$.

The same method can be used to solve n non-homogeneous linear equations containing n unknowns.

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1$$

$$a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2$$

$$a_3 x + b_3 y + c_3 z = d_3$$

ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಬೇಕು.

6.12 ರಲ್ಲಿ ಮಾಡಿದಂತೆ, ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು A_1, A_2, A_3 ಗಳಿಂದ ಗುಣಿಸಿ ಕೂಡೋಣ.

$$\therefore \quad x D = d_1 A_1 + d_2 A_2 + d_3 A_3.$$

$a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3$ ಎಂಬುದರಲ್ಲಿ a_1, a_2, a_3ಗೆ ಬದಲು d_1, d_2, d_3 ಬರೆದರೆ, $d_1 A_1 + d_2 A_2 + d_3 A_3$ ಬರುತ್ತದೆ.

$$\therefore \quad \text{ಇದರ ಬೆಲೆ} = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\therefore \quad x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

ಹೀಗೆಯೇ, $y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix} \div D$

$$z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} \div D$$

$D \neq 0$ ಆದಾಗ ಮಾತ್ರ, ಈ ಬಿಡಿಸುವಿಕೆ ಸಮಂಜಸವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಇದೇ ವಿಧಾನವನ್ನು, n ಅವ್ಯಕ್ತಗಳುಳ್ಳ, n ಅಸಮ ಪ್ರಮಾಣದ ಸರಳ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಲು ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು.

Exercises 26·2

Solve the following equations, with the help of determinants :

1. $2x-3y+z=11$

   $3x+y-z+2=0$

   $5x-y-z=4$

2. $3x+y+z=4$

   $4x+3z=6$

   $x+2y+z=5$

3. $x+y+z=1$

   $ax+by+cz=d$

   $a^2x+b^2y+c^2z=d^2$

4. If $ax+by+cz=0$, $bx+cy+az=0$, $cx+ay+bz=0$,

   show that $a^3+b^3+c^3=3\,abc$.

5. Eliminate a, b, c from $x=\dfrac{a}{b-c}$, $y=\dfrac{b}{c-a}$, $z=\dfrac{c}{a-b}$

6·14. *Multiplication of Determinants.* We can multiply two determinants of the same order so as to obtain another determinant of the same order. This will be illustrated by means of third order determinants.

$$\text{Let } D \equiv \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} ; \quad D' \equiv \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

Let $\triangle \equiv$

$$\begin{vmatrix} a_1\alpha_1+b_1\beta_1+c_1\gamma_1 & a_1\alpha_2+b_1\beta_2+c_1\gamma_2 & a_1\alpha_3+b_1\beta_3+c_1\gamma_3 \\ a_2\alpha_1+b_2\beta_1+c_2\gamma_1 & a_2\alpha_2+b_2\beta_2+c_2\gamma_2 & a_2\alpha_3+b_2\beta_3+c_2\gamma_3 \\ a_3\alpha_1+b_3\beta_1+c_3\gamma_1 & a_3\alpha_2+b_3\beta_2+c_3\gamma_2 & a_3\alpha_3+b_3\beta_3+c_3\gamma_3 \\ (L_1)\ (L_2)\ (L_3) & (M_1)\ (M_2)\ (M_3) & (N_1)\ (N_2)\ (N_3) \end{vmatrix}$$

ಅಭ್ಯಾಸ 2

ನಿರ್ಧಾರಕಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ, ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ :—

1. $2x-3y+z=11$
   $3x+y-z+2=0$
   $5x-y-z=4$

2. $3x+y+z=4$
   $4x+3z=3$
   $x+2y+z=5$

3. $x+y+z=1$
   $ax+by+cz=d$
   $a^2x+b^2y+c^2z=d^2$

4. $ax+by+cz=0$, $bx+cy+az=0$ $cx+ay+bz=0$
   ಆದರೆ, $a^3+b^3+c^3=3abc$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

5. $x=\frac{a}{b-c}$, $y=\frac{b}{c-a}$, $z=\frac{c}{a-b}$ ಇವುಗಳಿಂದ a, b, c ವಿಸರ್ಜಿಸಿ.

6.14. **ನಿರ್ಧಾರಕಗಳ ಗುಣಾಕಾರ.** ಒಂದೇ ಪರಿಮಾಣದ ಎರಡು ನಿರ್ಧಾರಕಗಳನ್ನು ಗುಣಿಸಿ ಅದೇ ಪರಿಮಾಣದ ಇನ್ನೊಂದು ನಿರ್ಧಾರಕವನ್ನು ಪಡೆಯುವ ವಿಧಾನವುಂಟು. ಮೂರನೇ ಪರಿಮಾಣದ ನಿರ್ಧಾರಕಗಳಿಗೆ ಇದನ್ನು ಉದಹರಿಸುವೆವು.

$$D \equiv \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} ; \quad D' \equiv \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$ ಆಗಿರಲಿ.

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} a_1\alpha_1+b_1\beta_1+c_1\gamma_1 & a_1\alpha_2+b_1\beta_2+c_1\gamma_2 & a_1\alpha_3+b_1\beta_3+c_1\gamma_3 \\ a_2\alpha_1+b_2\beta_1+c_2\gamma_1 & a_2\alpha_2+b_2\beta_2+c_2\gamma_2 & a_2\alpha_3+b_2\beta_3+c_2\gamma_2 \\ a_3\alpha_1+b_3\beta_1+c_3\gamma_1 & a_3\alpha_2+b_3\beta_2+c_3\gamma_2 & a_3\alpha_3+b_3\beta_3+c_3\gamma_3 \\ (L_1)\ (L_2)\ L_3) & (M_1)\ (M_2)\ (M_3) & (N_1)\ (N_2)\ (N_3) \end{vmatrix}$$

ಆಗಿರಲಿ

The construction of this can be easily understood. The elements of the first row are multiplied by the rows of D', and added so as to form the first row of $\triangle$. The second row of $\triangle$ is similarly obtained by taking the second row of D with the rows of D'. Similarly for the third row of $\triangle$.

We now prove that $\triangle = DD'$.

By the method of 6·9, $\triangle$ can be split up into $3 \times 3 \times 3 = 27$ determinants. If the partial columns of $\triangle$ are called

$$L_1, L_2, L_3; \quad M_1, M_2, M_3; \quad N_1, N_2, N_3, \text{ then}$$

$$\triangle = \Sigma\, L_r\, M_s\, N_t, \quad (r, s, t = 1, 2, 3)$$

If two of r, s, t have the same value, the determinant so obtained is zero. For example,

$$L_1\ M_1\ N_2 = \begin{vmatrix} a_1\,\alpha_1 & a_1\,\alpha_2 & b_1\,\beta_3 \\ a_2\,\alpha_1 & a_2\,\alpha_2 & b_2\,\beta_3 \\ a_3\,\alpha_1 & a_3\,\alpha_2 & b_3\,\beta_3 \end{vmatrix}$$

$$= \alpha_1\,\alpha_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = 0.$$

$$\therefore \triangle = (L_1\ M_2\ N_3) + (L_1\ M_3\ N_2) + (L_2\ M_3\ N_1) + (L_2\ M_1\ N_3) + (L_3\ M_1\ N_2) + (L_3\ M_2\ N_1)$$

$$= \alpha_1\,\beta_2\,\gamma_3\,D - \alpha_1\,\beta_3\,\gamma_2\,D + \beta_1\,\gamma_2\,\alpha_3\,D - \beta_1\,\gamma_3\,\alpha_2\,D + \gamma_1\,\alpha_2\,\beta_3\,D - \gamma_1\,\alpha_3\,\beta_2\,D$$

$$= [\,\alpha_1\,(\beta_2\,\gamma_3 - \beta_3\,\gamma_2) + \beta_1\,(\alpha_3\,\gamma_2 - \alpha_2\,\gamma_3) + \gamma_1\,(\alpha_2\,\beta_3 - \alpha_3\,\beta_2)\,]D$$
$$= D'\,D.$$

The method can be applied for any two determinants of the same order.

ಇದರ ರಚನೆಯನ್ನು ಸುಲಭವಾಗಿ ತಿಳಿಯಬಹುದು. D ಯ ಮೊದಲನೆಯ ಅಡ್ಡ ಸಾಲಿನ ಅಂಶಗಳನ್ನು D′ ನ ಅಡ್ಡಸಾಲಿನ ಅಂಶಗಳೊಡನೆ ಗುಣಿಸಿ ಕೂಡಿ △ ನ ಮೊದಲನೆಯ ಅಡ್ಡಸಾಲನ್ನು ಪಡೆಯಲಾಗಿದೆ. D ಯ ಎರಡನೆಯ ಅಡ್ಡ ಸಾಲನ್ನು ಹೀಗೆಯೇ D′ ನ ಸಾಲುಗಳೊಡನೆ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು △ ನ ಎರಡನೆಯ ಸಾಲನ್ನು ಪಡೆಯಲಾಗಿದೆ. ಹೀಗೆಯೇ △ ನ ಮೂರನೆಯಸಾಲಿಗೂ.

ಈಗ $\triangle = D\,D'$ ಎಂದು ತೋರಿಸುವೆವು.

6.9ರ ವಿಧಾನದಂತೆ, △ ನ್ನು $3\times3\times3=27$ ನಿರ್ಧಾರಕಗಳಾಗಿ ಒಡೆಯಬಹುದು. △ ನಲ್ಲಿ ನೀಟು ಸಾಲುಗಳನ್ನು ಖಂಡಶಃ L_1, L_2, L_3 ; M_1, M_2, M_3 ; N_1, N_2, N_3 ಎಂದು ಗುರ್ತಿಸಿದರೆ.

$\triangle\Sigma = L_r M_s N_t$, $(r, s, t = 1, 2, 3)$, r, s, t ಗಳಲ್ಲಿ ಎರಡಕ್ಕೆ ಒಂದೇ ಬೆಲೆ ಇದರೆ, ಹಾಗೆ ಬಂದ ನಿರ್ಧಾರಕವು ಸೊನ್ನೆಯಾಗುತ್ತದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ,

$$L_1M_1N_2 = \begin{vmatrix} a_1\alpha_1 & a_1\alpha_2 & b_1\beta_3 \\ a_2\alpha_1 & a_2\alpha_2 & b_2\beta_3 \\ a_3\alpha_1 & a_3\alpha_2 & b_3\beta_3 \end{vmatrix}$$

$$= \alpha_1\,\alpha_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore \triangle = (L_1M_2N_3)+(L_1M_3N_2)+(L_2M_3N_1)+(L_2M_1N_3) +(L_3M_1N_2)+(L_3M_2N_1)$$

$$= \alpha_1\,\beta_2\,\gamma_3\,D - \alpha_1\,\beta_3\,\gamma_2\,D + \beta_1\,\gamma_2\,\alpha_3\,D - \beta_1\,\gamma_3\,\alpha_2\,D + \gamma_1\,\alpha_2\,\beta_3\,D - \gamma_1\,\alpha_3\,\beta_2\,D$$

$$= [\alpha_1(\beta_2\gamma_3 - \beta_3\gamma_2) + \beta_1(\alpha_3\gamma_2 - \alpha_2\gamma_3) + \gamma_1(\alpha\ \beta_3 \quad \alpha_3\beta_2)]\,D$$
$$= D'\,D,$$

ಇದೇ ವಿಧಾನವನ್ನು ಒಂದೇ ಪರಿಣಮಾದ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ನಿರ್ಧಾರಕಗಳಿಗೆ ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು,

We have combined the rows of one determinant with the rows of a second. Instead of this, the product DD' can be obtained by combining the rows of one with the columns of the other. This is equivalent to interchanging the rows and columns of the second, and then applying the above process. This process will be used in the next chapter under the name "matrix multiplication."

6.15. *Examples*—

(1) If $D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$, then $\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} = D^2$.

For, the product of the two determinants is

$$\begin{vmatrix} a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3 & a_1 B_1 + a_2 B_2 + a_3 B_3 & a_1 C_1 + a_2 C_2 + a_3 C_3 \\ b_1 A_1 + b_2 A_2 + b_3 A_3 & b_1 B_1 + b_2 B_2 + b_3 B_3 & b_1 C_1 + b_2 C_2 + b_3 C_3 \\ c_1 A_1 + c_2 A_2 + c_3 A_3 & c_1 B_1 + c_2 B_2 + c_3 B_3 & c_1 C_1 + c_2 C_2 + c_3 C_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} D & 0 & 0 \\ 0 & D & 0 \\ 0 & 0 & D \end{vmatrix} \text{(See 6.8)}$$

$$= L^3.$$

Hence the value of the second determinant is D^2.

(2) *The product of two numbers, each of which is the sum of four squares can be expressed as the sum of four squares.* (Euler's Theorem)

Let the two numbers be $a^2+b^2+c^2+d^2$ and $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2$. Required to express their product also in the same form.

ಒಂದು ನಿರ್ಧಾರಕದ ಅಡ್ಡ ಸಾಲುಗಳನ್ನು ಇನ್ನೊಂದರ ಅಡ್ಡಸಾಲುಗಳೊಡನೆ ಸಂಯೋಜಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಇದಕ್ಕೆ ಬದಲು ಒಂದರ ಅಡ್ಡಸಾಲುಗಳನ್ನೂ ಇನ್ನೊಂದರ ನೀಟು ಸಾಲುಗಳನ್ನೂ ಸಂಯೋಜಿಸಿ, D D′ನ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು. ಎರಡನೆಯ ನಿರ್ಧಾರಕದಲ್ಲಿ ಅಡ್ಡಸಾಲುಗಳನ್ನೂ ನೀಟು ಸಾಲುಗಳನ್ನೂ ಅದಲುಬದಲು ಮಾಡಿ ಮೇಲಿನ ವಿಧಾನವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿದರೆ ಈ ಕ್ರಮವು ಬಂದಂತಾಗುತ್ತದೆ. ಈ ಕ್ರಮವನ್ನು ಕೋಶಗುಣಾಕಾರ ಎಂಬ ಹೆಸರಿನಿಂದ ಮುಂದಿನ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ವಿಸ್ತರಿಸುವೆವು.

6.15. ಉದಾಹರಣೆಗಳು.

(1) $D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$ ಆದರೆ, $\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} = D^2$

ಏಕೆಂದರೆ, ಎರಡೂ ನಿರ್ಧಾರಕಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ

$$= \begin{vmatrix} a_1A_1+a_2A_2+a_3A_3 & a_1B_1+a_2B_2+a_3B_3 & a_1C_1+a_2C_2+a_3C_3 \\ b_1A_1+b_2A_2+b_3A_3 & b_1B_1+b_2B_2+b_3B_3 & b_1C_1+b_2C_2+b_3C_3 \\ c_1A_1+c_2A_2+c_3A_3 & c_1B_1+c_2B_2+c_3B_3 & c\,C_1+c_2C_2+c_3C_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} D & 0 & 0 \\ 0 & D & 0 \\ 0 & 0 & D \end{vmatrix}$$ (6.8 ನೋಡಿ)

$= D^3$ ಆದ್ದರಿಂದ, ಎರಡನೆಯ ನಿರ್ಧಾರಕದ ಬೆಲೆ D^2.

(2) ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದೂ ನಾಲ್ಕು ವರ್ಗಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಈ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನೂ ನಾಲ್ಕುವರ್ಗ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು. (ಆಯಿಲರನ ಪ್ರಮೇಯ).

ದತ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು $a^2+b^2+c^2+d^2$ ಮತ್ತು $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2$. ಇವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನೂ ಇದೇ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯುವುದೇ ಪ್ರಶ್ನೆ.

Now, $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = \begin{vmatrix} a + ib & c + id \\ -c + id & a - ib \end{vmatrix}$

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 = \begin{vmatrix} \alpha + i\beta & \gamma + i\delta \\ -\gamma + i\delta & \alpha - i\beta \end{vmatrix}, \text{ where } i = \sqrt{-1}.$$

The product of these two determinants is

$$\begin{vmatrix} (a+ib)(\alpha+i\beta)+(c+id)(\gamma+i\delta) & (a+ib)(-\gamma+i\delta)+(c+id)(\alpha-i\beta) \\ (-c+id)(\alpha+i\beta)+(a-ib)(\gamma+i\delta) & (-c+id)(-\gamma+i\delta)+(a-ib)(\alpha-i\beta) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} (a\alpha - b\beta + c\gamma - d\delta) & (-a\gamma - b\delta + c\alpha + d\beta) \\ + i\,(b\alpha + a\beta + d\gamma + c\delta) & + i\,(a\delta - b\gamma + d\alpha - c\beta) \\ (-c\alpha - d\beta + a\gamma + b\delta) & (c\gamma - d\delta + a\alpha - b\beta) \\ + i\,(d\alpha - c\beta + a\delta - b\gamma) & + i\,(d\gamma - c\delta - a\beta - b\alpha) \end{vmatrix}$$

If we write $a\alpha - b\beta + c\gamma - d\delta = p$, $b\alpha + a\beta + d\gamma + c\delta = q$

$-a\gamma - b\delta + c\alpha + d\beta = r$, $a\delta - b\gamma + d\alpha - c\beta = s$,

this is equal to $\begin{vmatrix} p + iq & r + is \\ -r + is & p - iq \end{vmatrix} = p^2 + q^2 + r^2 + s^2.$

Exercises 6.3

1. Prove that $\begin{vmatrix} (a_1-b_1)^2 & (a_1-b_2)^2 & (a_1-b_3)^2 \\ (a_2-b_1)^2 & (a_2-b_2)^2 & (a_2-b_3)^2 \\ (a_3-b_1)^2 & (a_3-b_2)^2 & (a_3-b_3)^2 \end{vmatrix} = 2(a_1-a_2)(a_2-a_3)(a_3-a_1)(b_1-b_2)(b_2-b_3)(b_3-b_1)$

[Multiply $\begin{vmatrix} a_1^2 & a_1 & 1 \\ a_2^2 & a_2 & 1 \\ a_3^2 & a_3 & 1 \end{vmatrix}$ and $\begin{vmatrix} 1 & -2b_1 & b_1^2 \\ 1 & -2b_2 & b_2^2 \\ 1 & -2b_3 & b_3^2 \end{vmatrix}$].

ಈಗ, $a^2+b^2+c^2+d^2=\begin{vmatrix} a+ib & c+id \\ -c+id & a-ib \end{vmatrix}$

$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2=\begin{vmatrix} \alpha+i\beta & \gamma+i\delta \\ -\gamma+i\delta & \alpha-i\beta \end{vmatrix}$, ಇಲ್ಲಿ $i=\sqrt{-1}$

ನಿರ್ಧಾರಕಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ

$$=\begin{vmatrix} (a+ib)(\alpha+i\beta)+(c+id)(\gamma+i\delta) & (a+ib)(-\gamma+i\delta)+(c+id)(\alpha-i\beta) \\ (c-\ +id)(\alpha+i\beta)+(a-ib)(\gamma+i\delta) & (-c+id)(-\gamma+i\delta)+(a+ib)(\alpha+i\beta) \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} (a\alpha-b\beta+c\gamma-d\delta)+i(b\alpha+a\beta+d\gamma+c\delta) & (-a\gamma-b\delta+c\alpha+d\beta)+i(a\delta-b\gamma+d\alpha-c\beta) \\ (-c\alpha-d\beta+a\gamma+b\delta)+i(d\alpha-c\beta+a\delta-b\gamma) & (c\gamma-d\delta+a\alpha-b\beta)+i(-d\gamma-c\delta-a\beta-b\alpha) \end{vmatrix}$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $a\alpha-b\beta+c\gamma-d\delta=p$, $b\alpha+a\beta+d\gamma+c\delta=q$

$-a\gamma-b\delta+c\alpha+d\beta=r$, $a\delta-b\gamma+d\alpha-c\beta=s$ ಆದರೆ,

ಈ ಗುಣಲಬ್ಧವು $\begin{vmatrix} p+iq & r+is \\ -r+is & p-iq \end{vmatrix}=p^2+q^2+r^2+s^2$.

ಅಭ್ಯಾಸ 6.3.

1. $\begin{vmatrix} (a_1-b_1)^2 & (a_1-b_2)^2 & (a_1-b_3)^2 \\ (a_2-b_1)^2 & (a_2-b_2)^2 & (a_2-b_3)^2 \\ (a_3-b_1)^2 & (a_3-b_2)^2 & (a_3-b_3)^2 \end{vmatrix}=2(a_1-a_2)(a_2-a_3)(a_3-a_1)(b_1-b_2)(b_2-b_3)(b_3-b_1)$.

ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

[$\begin{vmatrix} a_1^2 & a_1 & 1 \\ a_2^2 & a_2 & 1 \\ a_3^2 & a_3 & 1 \end{vmatrix}$ ಮತ್ತು $\begin{vmatrix} 1 & -2b_1 & b_1^2 \\ 1 & -2b_2 & b_2^2 \\ 1 & -2b_3 & b_3^2 \end{vmatrix}$, ಇವುಗಳನ್ನು ಗುಣಿಸಿ]

2. Prove that

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = -(a^3 + b^3 + c^3 - 3\,abc)$$

Hence express the product $(a^3+b^3+c^3-3\,abc)\,(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\,\alpha\beta\gamma)$ in the form $X^3 + Y^3 + Z^3 - 3\,XYZ$.

3. Show that

$$\begin{vmatrix} 2\,bc-a^2 & c^2 & b^2 \\ c^2 & 2ca-b^2 & a^2 \\ b^2 & a^2 & 2\,ab-c^2 \end{vmatrix} = (a^3 + b^3 + c^3 - 3\,abc)^2.$$

[Multiply $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$ and $\begin{vmatrix} -a & c & b \\ -b & a & c \\ -c & b & a \end{vmatrix}$].

---

2. $$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = -(a^3+b^3+c^3-3\,abc)$$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $(a^3+b^3+c^3-3\,abc)\,(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma)$ ಎಂಬ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು $x^3+y^3+z^3-3xyz$ ಎಂಬ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.

3. $$\begin{vmatrix} 2bc-a^2 & c^2 & b \\ c^2 & 2ca-b^2 & a^2 \\ b^2 & a^2 & 2ab-c^2 \end{vmatrix} = (a^3+b^3+c^3-3abc)^2$$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

[$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$ ಮತ್ತು $\begin{vmatrix} -a & c & b \\ -b & a & c \\ -c & b & a \end{vmatrix}$ ಇವನ್ನು ಗುಣಿಸಿ.]

CHAPTER 7

Matrices

7·1. A set of numbers or other mathematical magnitudes are assembled together in a row-column array A of the following form.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{pmatrix}$$

This array is called a *matrix*, and we build up a mathematics of such arrays. The matrix, which we briefly indicate by A contains m rows and n columns. A matrix containing m rows and n columns is called a (m, n) or $m \times n$ matrix. a_{11}, a_{12}, $\cdots$ are the elements of the matrix. A typical element will be denoted by a_{ij}. The bracket ( ) enclosing the elements of the matrix is sometimes replaced by the brackets [ ] or by ‖ ‖. The matrix itself is briefly written as (a_{ij}), or $[a_{ij}]$ or $\| a_{ij} \|$.

In this chapter, Latin capital letters $A, B, C, X, Y, \ldots$ will denote matrices.

7·2. m, n may be any natural numbers. When $m=1$, we get the row-matrix $A = [\, a_{11}, a_{12}, \ldots\ldots, a_{1n} \,]$.

When $n=1$, we get the column matrix

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdots \\ \cdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}.$$

ಅಧ್ಯಾಯ 7

ಕೋಶಗಳು

7.1. ಕೆಲವು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನೋ ಇತರ ಗಣಿತಾಂಶಗಳನ್ನೋ

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

ಎಂಬ ಜೋಡಣೆಯಲ್ಲಿ ಅಡಕಮಾಡಿ, ಇಂಥ ಜೋಡಣೆಗಳ ಗಣಿತವನ್ನು ಪ್ರಸ್ತಾಪಿಸುತ್ತೇವೆ. ಈ ಜೋಡಣೆಗೆ ಕೋಶ ಎಂದು ಹೆಸರಿಡುತ್ತೇವೆ. ಇದರಲ್ಲಿ m ಅಡ್ಡಸಾಲುಗಳೂ, n ನೀಟು ಸಾಲುಗಳೂ ಇವೆ. ಕೋಶವನ್ನು ಸಂಕ್ಷೇಪವಾಗಿ A ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. A ಎಂಬುದು. m ಅಡ್ಡಸಾಲುಗಳೂ n ನೀಟು ಸಾಲುಗಳೂ ಇರುವ ಒಂದು ಕೋಶ; A ಎಂಬುದು (m, n) ಅಥವಾ $m \times n$ ಕೋಶ ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ. $a_{11}, a_{12}, \ldots$ ಮುಂತಾದುವು ಕೋಶದ ಅಂಶಗಳು. ಯಾವುದೇ ಅಂಶವನ್ನು a_{ij} ಎಂದು ನಿರೂಪಿಸುತ್ತೇವೆ. ಕೋಶದ ಅಂಶಗಳನ್ನೆಲ್ಲಾ ( ) ಎಂಬ ಆವರಣದಲ್ಲಿಟ್ಟಿದ್ದೇವೆ. ಈ ಆವರಣಕ್ಕೆ ಬದಲು [ ] ಅಥವಾ ‖ ‖ ಎಂಬ ಆವರಣಗಳನ್ನೂ ಉಪಯೋಗಿಸುವುದುಂಟು. ಕೋಶವನ್ನು ಸಂಕ್ಷೇಪವಾಗಿ (a_{ij}) ಅಥವಾ $[a_{ij}]$ ಅಥವಾ $\| a_{ij} \|$ ಎಂದೂ ಬರೆಯುವುದುಂಟು.

ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ A, B, C, X, Y,...ಮುಂತಾದ ಲ್ಯಾಟಿನ್ ದೊಡ್ಡ ಅಕ್ಷರಗಳು ಕೋಶಗಳನ್ನು ನಿರೂಪಿಸುತ್ತವೆ.

7.2 m, n ಯಾವುದೇ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರಬಹುದು. $m = 1$ ಆದಾಗ, ಅಡ್ಡಸಾಲು ಕೋಶ

$A = (a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n})$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. $n = 1$ ಆದಾಗ, ನೀಟುಸಾಲು ಕೋಶ

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

When $m=n$, A becomes a "square matrix". Its diagonal $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots\ldots, a_{nn}$ is called the *principal diagonal.*

If in a square matrix, all elements are zero except those on the principal diagonal, the matrix is called a *diagonal matrix.* A diagonal matrix in which the elements on the principal diagonal are all 1, is called a *unit matrix.* A unit matrix is denoted by I, or if it is desired to indicate the order of the matrix, i.e. to indicate that it has r rows and r columns, we denote the matrix by I_r.

If all the elements of a matrix are zero, it is a *null matrix*

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \cdots 0 \\ 0 & a_2 & 0 \cdots 0 \\ 0 & 0 & a_3 \cdots 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 \ldots 0 & \cdots a_n \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \cdots 0 \\ 0 & 1 & 0 \cdots 0 \\ 0 & 0 & 1 \cdots 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \\ 0 & 0 & 0 \cdots 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 \cdots\cdots 0 \\ 0 & 0 \cdots\cdots 0 \\ \cdots & \cdots \quad \cdots \\ \\ 0 & 0 \cdots\cdots 0 \end{pmatrix}$$

(diagonal matrix) (unit matrix) (null matrix)

7·3. Two matrices are said to be *equal,* if their corresponding elements are equal. This means that if $A=B$, both should be $m \times n$ matrices, for the same m, n and $a_{ij}=b_{ij}$, for every i and j.

This definition provides an equivalence relation (chapter 1.7) amongst equal matrices. For we have $A=A$; when $A=B$, we have $B=A$; when $A=B$, and $B=C$, we have $A=C$.

Addition. Two matrices of the same type can be added. If A and B are both $(m \times n)$ matrices, we obtain the "sum" of A and B, by adding corresponding elements.

If $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$, then $A+B=(a_{ij}+b_{ij})$.

$m=n$ ಆದಾಗ, A ಚೌಕುಳಿಕೋಶ ಎನ್ನಿಸಿಕೊಳ್ಳುತ್ತದೆ. ಈ ಚೌಕುಳಿಕೋಶದಲ್ಲಿ, $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \cdots, a_{nn}$ ಎಂಬ ಕರ್ಣಕ್ಕೆ ಪ್ರಧಾನಕರ್ಣ ಎಂದು ಹೆಸರು.

ಚೌಕುಳಿಕೋಶದಲ್ಲಿ ಪ್ರಧಾನಕರ್ಣದ ಮೇಲಿರುವ ಅಂಶಗಳ ಹೊರತು ಉಳಿದ ಅಂಶಗಳೆಲ್ಲಾ ಸೊನ್ನೆಯಾಗಿದ್ದರೆ, ಕೋಶಕ್ಕೆ **ಕರ್ಣಕೋಶ** ಎಂದು ಹೆಸರು. ಈ ಕರ್ಣಕೋಶದಲ್ಲಿ ಪ್ರಧಾನಕರ್ಣದ ಮೇಲಣ ಅಂಶಗಳೆಲ್ಲಾ 1 ಆದರೆ, ಕೋಶಕ್ಕೆ **ಏಕಮಾನಕೋಶ**ಎಂದು ಹೆಸರು, ಏಕಮಾನ ಕೋಶವನ್ನು I ಎಂಬ ಚಿಹ್ನೆಯಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ. r ಪರಿಮಾಣದ್ದು, ಎಂದರೆ r ಅಡ್ಡ ಅಥವಾ ನೀಟು ಸಾಲುಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ ಎಂದು ತಿಳಿಸಬೇಕಾದರೆ, I_r ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

ಕರ್ಣಕೋಶ ಏಕಮಾನಕೋಶ ಶೂನ್ಯ ಕೋಶ

ಕೋಶದ ಎಲ್ಲಾ ಅಂಶಗಳೂ ಸೊನ್ನೆಯಾದರೆ, ಅದು **ಶೂನ್ಯಕೋಶ.**

7.3 ಎರಡು ಕೋಶಗಳಲ್ಲಿ ಪರಸ್ಪರ ಅಂಶಗಳು ಸಮನಾಗಿದ್ದರೆ, ಕೋಶಗಳನ್ನು ಸಮವೆನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಎಂದರೆ A, B ಎರಡೂ $(m \times n)$ ಕೋಶಗಳಾಗಿ, ಪ್ರತಿ i, j ಗೂ $a_{ij} = b_{ij}$ ಆದರೆ, $A=B$.

ಈ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯಂತೆ, ಸಮಕೋಶಗಳಲ್ಲಿ ಸಮಾನತಾ ಸಂಬಂಧವು [ಅಧ್ಯಾಯ 1.7] ಏರ್ಪಡುತ್ತದೆ. ಎಂದರೆ $A=A$; $A=B$ ಆದಾಗ $B=A$, $A=B$ ಮತ್ತು $B=C$ ಆದಾಗ, $A=C$.

ಸಂಕಲನ. ಒಂದೇ ವಿಧದ ಎರಡು ಕೋಶಗಳನ್ನು ಸಂಕಲನ ಮಾಡಬಹುದು. A, B ಎರಡೂ $(m \times n)$ ಕೋಶಗಳಾಗಿದ್ದರೆ, ಪರಸ್ಪರ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಕೂಡಿ, A,Bಗಳ "ಮೊತ್ತ"ವನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ. $A=(a\ )$, $(B=b_{ij})$ ಆದರೆ $A+B=(a_{ij}+b_{ij})$.

Example:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 7 \\ 5 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix},$$

then $A + B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & 2 & 2 & 12 \\ 9 & 5 & 2 & 9 \end{pmatrix}$

If the elements of the matrices that we employ are real or complex numbers, the associative and commutative laws for matrix addition follow from the corresponding properties of these numbers. In other words, if A, B, C are matrices of the same type,

$$A + B = B + A \qquad \text{Commutative law}$$

$$A + (B + C) = (A + B) + C \qquad \text{Associative law.}$$

Addition is not possible between matrices of different types. An $(m \times n)$ matrix cannot be added to a $(p \times q)$—matrix, $(m \neq p, n \neq q)$.

7·4. By the above, $A + A = 2A = (2a_{ij})$, $2A + A = 3A = (3a_{ij})$. Generalising this, we define $kA = (ka_{ij})$, where k need not be an integer. kA is the matrix obtained by multiplying by k every element of A.

$$kA = \begin{pmatrix} k\,a_{11} & k\,a_{12} \cdots & k\,a_{1n} \\ k\,a_{21} & k\,a_{22} \cdots & k\,a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ k\,a_{m1} & \cdots & k\,a_{mn} \end{pmatrix}$$

This is some times called "scalar multiplication" of a matrix.

The matrix

$$kI = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \cdots & 0 \\ 0 & k & 0 \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & k \end{pmatrix}$$

is called a *scalar matrix.*

ಉದಾಹರಣೆ :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 7 \\ 5 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A+B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & 2 & 2 & 12 \\ 9 & 5 & 2 & 9 \end{pmatrix}$$

ಕೋಶಗಳಲ್ಲಿ ಅಂಶಗಳು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಲಿ ಮಿಶ್ರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಲಿ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಗಳಿಂದ ಕೋಶಗಳ ಸಂಕಲನಕ್ಕೆ ಸಹವರ್ತನ ಪರಿವರ್ತನ ನಿಯಮಗಳು ಒಡನೆಯೇ ಏರ್ಪಡುತ್ತವೆ. ಎಂದರೆ, A, B, C ಒಂದೇ ವಿಧದ ಕೋಶಗಳಾಗಿದ್ದರೆ,

$A+B=B+A$ ಪರಿವರ್ತನ ನಿಯಮ

$A+(B+C)=(A+B)+C$ ಸಹವರ್ತನ ನಿಯಮ.

ಕೋಶಗಳು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ವಿಧದವುಗಳಾದರೆ, ಅವುಗಳ ನಡುವೆ ಸಂಕಲನವು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಒಂದು $(m \times n)$ ಕೋಶವನ್ನೂ ಒಂದು $(p \times q)$ ಕೋಶವನ್ನೂ, $(m \neq p, n \neq q)$ ಕೂಡುವುದಕ್ಕಾಗುವುದಿಲ್ಲ.

7.4. ಮೇಲಿನ ಕ್ರಮದಂತೆ, $A+A=2A=(2a_{ij})$. $2A+A=3A=(3a_{ij})$. ಇದನ್ನು ವಿಸ್ತರಿಸುತ್ತಾ, $kA=(ka_{ij})$, ಇಲ್ಲಿ k ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆ (ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾಗದಿರಬಹುದು). ಎಂದರೆ, Aನಲ್ಲಿರುವ, ಪ್ರತಿ ಅಂಶವನ್ನೂ k ಇಂದ ಗುಣಿಸಿ ಬರುವ ಕೋಶವನ್ನೂ kA ಎಂದು, ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸುವೆವು.

$$kA = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{m1} & \cdots & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}$$

ಕೋಶದ ಅದಿಶಗುಣಾಕಾರ ಎಂದು ಇದನ್ನು ಕರೆಯುವುದುಂಟು.

$$kI = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & k \end{pmatrix}$$

ಎಂಬ ಕೋಶವನ್ನು ಅದಿಶಕೋಶ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ.

If A and B are matrices of the same type, we define

$$A-B \text{ as } A + (-B) = A + [(-1) \cdot B],$$

7.5. *Multiplication of matrices.* If A is a $(m \times n)$-matrix, B, a $(n \times p)$-matrix, their product AB is obtained as follows:

The elements of the first row of A are multiplied by the elements of the first column of B, and the sum obtained forms the first element of the matrix AB. Similarly, the elements of the first row of A are multiplied by the elements of the second column of B, and the sum gives the second element in the first row of AB; and so on. Similarly, the second row of AB is obtained by multiplying the elements of the second row of A with the columns of B, and adding. And so on.

$$\text{If } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ and } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix}$$

then

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11}\ b_{11} + a_{12}\ b_{21} + a_{13}\ b_{31} + \cdots & a_{11}\ b_{18} + a_{12}\ b_{22} + \cdots, \\ a_{21}\ b_{11} + a_{22}\ b_{21} + a_{28}\ b_{31} + \cdots & a_{21}\ b_{12} + a_{22}\ b_{22} + \cdots, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}\ b_{11} + a_{m2}\ b_{21} + a_{m3}\ b_{31} + \cdots & a_{m1}\ b_{12} + a_{m2}\ b_{22} + \cdots \end{pmatrix}$$

Example :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \ B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & 3 & -2 \end{pmatrix},$$

$$AB = \begin{pmatrix} 20 & 8 & 10 & -6 \\ 11 & 6 & 7 & -7 \end{pmatrix}$$

[$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 = 20$, $1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 8$, $-1 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 1 \cdot 4 = 11$, etc.]

In order to multiply two matrices, the rule requires that the number of columns of the first matrix must be the same as the number of rows of the second. The product of an $(m \times n)$-matrix and an $(n \times p)$-matrix is a $(m \times p)$-matrix

A, B ಎರಡೂ ಒಂದೇ ವಿಧದ ಕೋಶಗಳಾದರೆ, $A-B=A+(-B) = A + [(-1)B]$ ಎಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸುತ್ತೇವೆ.

7.5 **ಕೋಶಗಳ ಗುಣಾಕಾರ.** A ಎಂಬುದು $(m \times n)$ ಕೋಶ. B ಎಂಬುದು $(n \times q)$ ಕೋಶವಾಗಿದ್ದರೆ, ಇವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ ABಯನ್ನು ಹೀಗೆ ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ.

Aಯ ಮೊದಲನೆಯ ಅಡ್ಡಸಾಲಿನ ಅಂಶಗಳನ್ನು Bಯ ಮೊದಲನೆಯ ನೀಟುಸಾಲಿನ ಅಂಶಗಳೊಡನೆ ಗುಣಿಸಿ ಬರುವ ಮೊತ್ತವು AB ಕೋಶದ ಮೊದಲನೆಯ ಅಂಶ. Aಯ ಮೊದಲನೆಯ ಅಡ್ಡ ಸಾಲನ್ನು Bಯ ಎರಡನೆಯ ನೀಟುಸಾಲಿನ ಅಂಶಗಳೊಡನೆಗುಣಿಸಿ ಬರುವ ಮೊತ್ತವು AB ಕೋಶದ ಮೊದಲನೆಯ ಅಡ್ಡ ಸಾಲಿನ ಎರಡನೆಯ ಅಂಶ. ಇತ್ಯಾದಿ. ಹೀಗೆಯೇ Aಯ ಎರಡನೆಯ ಅಡ್ಡಸಾಲಿನ ಅಂಶಗಳನ್ನು Bಯ ನೀಟು ಸಾಲುಗಳೊಡನೆ ಗುಣಿಸಿಕೂಡಿ, AB ಕೋಶದ ಎರಡನೆಯ ಅಡ್ಡಸಾಲು ದೊರಕುತ್ತದೆ ಇತ್ಯಾದಿ.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix}$$

ಆದರೆ,

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} + \cdots & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + \cdots \\ a \quad b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} + \cdots & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + \cdots \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots & \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{m1}b_{11} + a_{m2}b_{21} + a_{m3}b_{31} + \cdots & a_{m1}b_{12} + a_{m2}b_{22} + \cdots \end{pmatrix}$$

ಉದಾಹರಣೆ :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 20 & 8 & 10 & -6 \\ 11 & 6 & 7 & -7 \end{pmatrix}$$

[$1.2 + 2.3 + 3.4 = 20$ $-1.2 + 3.3 + 1.4 = 11$
$1.1 + 2.2 + 3.1 = 8$ ಇತ್ಯಾದಿ.]

ಈ ನಿಯಮದ ಪ್ರಕಾರ, ಎರಡು ಕೋಶಗಳನ್ನು ಗುಣಿಸಲು, ಮೊದಲನೆಯದರ ನೀಟುಸಾಲುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯೂ ಎರಡನೆಯ ಅಡ್ಡಸಾಲುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯೂ ಒಂದೇ ಆಗಿರಬೇಕು. $(m \times n)$, $(m \times p)$, ಕೋಶಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ $(m \times p)$

If $p \neq m$, the product BA does not exist.

If A and B are both square matrices of the same type $(n \times n)$, the products AB and BA both exist. But generally $AB \neq BA$, as may be seen by examples. We say that AB is obtained by *post–multiplying* A by B, while BA is obtained by *pre–multiplying* A by B.

7·6. It is necessary that the student acquires enough practice in the multiplication of matrices.

1.
$$[\,a, b, c\,] \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = ax + by + cz$$

But
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot [\,a, b, c\,] = \begin{pmatrix} ax & bx & cx \\ ay & by & cy \\ az & bz & cz \end{pmatrix}.$$

2.
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -3 \\ -8 & 5 & -7 \\ 11 & 5 & -1 \end{pmatrix}; \quad BA = \begin{pmatrix} 2 & -7 & -9 \\ 8 & 7 & 9 \\ 6 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

3.
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$p \neq m$ ಆದಲ್ಲಿ, BA ಗುಣಲಬ್ಧವಿರುವುದಿಲ್ಲ.

A.B ಎರಡೂ ಒಂದೇ ವರ್ಗದ $(n \times n)$ ಚೌಕುಳಿ ಕೋಶಗಳಾದರೆ, AB, BA ಗುಣಲಬ್ಧಗಳೆರಡೂ ಇರುತ್ತವೆ. ಆದರೆ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ AB≠BA ಎಂಬುದನ್ನು ಉದಾಹರಣೆಗಳಿಂದ ಕಂಡುಕೊಳ್ಳಬಹುದು. Aನ್ನು Bಇಂದ **ಮುಂಗುಣಿಸಿದರೆ** AB ಬರುತ್ತದೆಯೆಂದೂ, Aನ್ನು Bಇಂದ **ಹಿಂಗುಣಿಸಿದರೆ** BA ಬರುತ್ತದೆಯೆಂದೂ ಹೇಳುತ್ತೇವೆ.

7.6 ಕೋಶಗಳ ಗುಣಾಕಾರ ವಿಧಾನದಲ್ಲಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯು ತಕ್ಕಷ್ಟು ಅಭ್ಯಾಸ ವನ್ನು ಪಡೆಯುವುದು ಅತ್ಯವಶ್ಯಕ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು :

1.

$$[a, b, c] \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = ax + by + cz.$$

ಆದರೆ,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot [a, b, c] = \begin{pmatrix} ax & bx & cx \\ ay & by & cy \\ az & bz & cz \end{pmatrix}$$

2.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -3 \\ -8 & 5 & -7 \\ 11 & 5 & -1 \end{pmatrix}; \quad BA = \begin{pmatrix} 2 & -7 & -9 \\ 8 & 7 & 9 \\ 6 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

3.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 15 & 10 \\ 10 & 15 \end{pmatrix}; BA = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -2 \\ -1 & 13 & 12 & 1 \\ 1 & 12 & 13 & -1 \\ -2 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 6 & 12 & 6 \\ 5 & 10 & 5 \end{pmatrix}$

$AB=0$ (i.e. the null-matrix), but $BA \neq 0$.

If $C = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$, $CA = 0$, but $AC \neq 0$

5. If $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$

show that $AB = AC$.

6. If $A = [\, x, y, z \,]$, $B = \begin{pmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$

then $A(BC) = (AB)C =$

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy.$$

$$AB = \begin{pmatrix} 15 & 10 \\ 10 & 15 \end{pmatrix} ; \quad BA = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -2 \\ -1 & 13 & 12 & 1 \\ 1 & 12 & 13 & -1 \\ -2 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

4. $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 6 & 12 & 6 \\ 5 & 10 & 5 \end{pmatrix}$$

$AB = 0$ (ಶೂನ್ಯಕೋಶ) ಆದರೆ $BA \neq 0$.

$$C = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$ ಆದರೆ, $CA = 0$, $AC \neq 0$.

5. $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$ ಆದರೆ

$AB = AC$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

6. $$A = [x, y, z] \quad B = \begin{pmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$A\,(BC) = (AB)\,C = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy$$

7. If $l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 = 1$, and

$$\begin{pmatrix} l_1^2 & l_1 l_2 & l_1 l_3 \\ l_1 l_2 & l_2^2 & l_2 l_3 \\ l_1 l_3 & l_2 l_3 & l_3^2 \end{pmatrix} = L, \begin{pmatrix} m_1^2 & m_1 m_2 & m_1 m_3 \\ m_1 m_2 & m_2^2 & m_2 m_3 \\ m_1 m_3 & m_2 m_3 & m_3^2 \end{pmatrix} = M,$$

prove that $L^2 = L$, and that $LM = 0$ if $l_1 m_1 + l_2 m_2 + l_3 m_3 = 0$.

8. Show that the usual algebraic rules

$$(A + B)^2 = A^2 + 2\,AB + B^2, \quad (A + B)(A - B) = A^2 - B^2$$

are not applicable to matrices in general. When are they true ?

7·7. The examples 4 and 5 above bring out two note-worthy facts. If A, B, C are matrices, AB may be equal to 0, without either A or B being 0. The principle underlying this will be explained in 8.6.

We may have $AB = AC$, without having $B = C$.

7·8. Matrix multiplication obeys the associative law.

Theorem 1. *If A, B, C are respectively* $(m \times n)$, $(n \times p)$, $(p \times q)$ *matrices*, then $(AB)\,C = A\,(BC)$.

Let $A = (a_{ij})$, $B = (b_{jk})$, $C = (c_{kl})$.

$(i = 1 \text{ to } m, \quad j = 1 \text{ to } n, \quad k = 1 \text{ to } p, \quad l = 1 \text{ to } q)$.

The $(i, k)^{th}$ element in the product $AB = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, b_{jk}$.

The i^{th} row of AB is obtained by giving in this, the different values of k (1 to p).

7.

$l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 = 1$ ಆದರೆ, ಮತ್ತು

$$\begin{pmatrix} l_1^2 & l_1 l_2 & l_1 l_3 \\ l_1 l_2 & l_2^2 & l_2 l_3 \\ l_1 l_3 & l_2 l_3 & l_3^2 \end{pmatrix} = L, \begin{pmatrix} m_1^2 & m_1 m_2 & m_1 m_3 \\ m_1 m_2 & m_2^2 & m_2 m_3 \\ m_1 m_3 & m_2 m_3 & m_3^2 \end{pmatrix} = M$$

ಆದರೆ, $L^2 = L$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ. $l_1 m_1 + l_2 m_2 + l_3 m_3 = 0$ ಆದಾಗ, $LM = 0$ ಎಂದೂ ತೋರಿಸಿ.

8. $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$, $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$ ಎಂಬ ಬೀಜಗಣಿತದ ಸಾಮಾನ್ಯ ನಿಯಮಗಳು ಕೋಶಗಳಿಗೆ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಅನ್ವಯಿಸುವುದಿಲ್ಲ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ. ಯಾವಾಗ ಇವು ನಿಜವಿರುತ್ತವೆ ?

7.7. ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳಿಂದ (ಉದಾ : 4, 5) ಎರಡು ಗಮನಾರ್ಹವಾದ ವಿಷಯಗಳು ಕಂಡುಬರುತ್ತವೆ. A, B, C ಕೋಶಗಳಾದರೆ, $AB = 0$ ಆಗಿರಬಹುದು, A ಯಾಗಲಿ B ಯಾಗಲಿ ಶೂನ್ಯವಾಗಿರಬೇಕಾಗಿಲ್ಲ. ಇದರ ತತ್ವವು 8.6 ರಲ್ಲಿ ವಿಶದವಾಗುವುದು.

$AB = AC$ ಆಗಿರಬಹುದು, ಆದರೆ $B = C$ ಆಗಬೇಕಾಗಿಲ್ಲ.

7.8. ಕೋಶಗಳ ಗುಣಾಕಾರವು ಸಹವರ್ತನ ನಿಯಮವನ್ನು ಪಾಲಿಸುತ್ತದೆ.

ಪ್ರಮೇಯ 1. A, B, C ಕ್ರಮವಾಗಿ $(m \times n)$, $(n \times p)$, $(p \times q)$ **ಕೋಶಗಳಾದರೆ,** $(AB)C = A(BC)$.

$A = (a_{ij})$, $B = (b_{jk})$, $C = (c_{kl})$, ಆಗಿರಲಿ.

($i = 1$ ರಿಂದ m, $j = 1$ ರಿಂದ n, $k = 1$ ರಿಂದ p, $l = 1$ ರಿಂದ q)

AB ಗುಣಲಬ್ಧದ (i, k) ಯ ಅಂಶ $= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$

ಇಲ್ಲಿ k ಗೆ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕೊಡುವುದರಿಂದ, AB ಯ i ನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲು ಸಿಗುತ್ತದೆ.

The $(i, l)^{th}$ element in $(AB)\,C$ is obtained by multiplying this row by the l^{th} column of C, and adding.

$$= \sum_{k=1}^{p} \left\{ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, b_{jk} \right\} . c_{kl}$$

$$= \sum_{k=1}^{p} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, b_{jk}\, c_{kl} \,. \qquad \text{(i)}$$

This term is obtained in $A(BC)$ as $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \left\{ \sum_{k=1}^{p} b_{jk}\, c_{kl} \right\}$.

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} a_{ij}\, b_{jk}\, c_{kl} \,. \qquad \text{(ii)}$$

(i) and (ii) being the same, it follows that $(AB)\,C = A\,(BC)$.

In a similar manner, the following can be proved, when the multiplications are possible.

$A\,(B + C) = AB + AC$ (left distributive law)

$(A + B)\,C = AC + BC$ (right distributive law)

The details of the proofs are left to the student.

The product AA exists only when A is a square matrix. This is written as A^2.

By the associative law,

$A^2 A = (AA)\,A = A\,(AA) = AA^2$.

This is written as A^3. Similarly $A^n = AA \cdots\cdots A$ (n times).

The right side can be partitioned in any way as $(AA \cdots\cdots A)$ $(AA \cdots\cdots A)$ and multiplied. If p, q are positive integers, it will be evident that

$A^p .\ A^q = A^{p+q}$, and $(A^p)^q = A^{pq}$.

(AB) C ನಲ್ಲಿ (i, l) ನ ಅಂಶ ಈ ಅಡ್ಡಸಾಲನ್ನು C ಯ l ನೇ ನೀಟು ಸಾಲಿನಿಂದ ಗುಣಿಸಿ ಕೂಡುವುದರಿಂದ ಬರುತ್ತದೆ.

$$= \sum_{k=1}^{p} \left\{ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \ b_{jk} \right\} c_{kl}$$

$$= \sum_{k=1}^{p} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \ b_{jk} \ c_{kl} \qquad \text{(i)}$$

A (B C) ಗುಣಲಬ್ಧದಲ್ಲಿ $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \left\{ \sum_{k=1}^{p} b_{jk} \ c_{kl} \right\}$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} d_{ij} \ b_{jk} \ c_{kl}$$ ಎಂದು ಬರುತ್ತದೆ. (ii)

i), (ii) ಸಮವಾದ್ದರಿಂದ, (AB) C = A (BC).

ಇದೇ ಪ್ರಕಾರ, ಗುಣಾಕಾರಗಳು ಸಾಧ್ಯವಾದಾಗ,

A (B+C) = AB+AC (ಎಡ ವಿಭಾಜಕ ನಿಯಮ)

ಮತ್ತು (A+B)C = AC+BC (ಬಲ ವಿಭಾಜಕ ನಿಯಮ)

ಎಂದು ತೋರಿಸಬಹುದು. ಸಾಧನೆಯ ವಿವರವನ್ನು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗೆ ಬಿಡಲಾಗಿದೆ.

A ಚೌಕುಳಿ ಕೋಶವಾದಾಗ ಮಾತ್ರ AA ಗುಣಲಬ್ಧವು ಇರುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನು A^2 ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಸಹವರ್ತನೆಯ ನಿಯಮದಿಂದ,

$$A^2 A = (A \ A) \ A = A \ (A \ A) = A \ A^2$$

ಇದನ್ನು A^3 ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಹೀಗೆಯೇ,

$A^n = A \ A \ldots A$ (n ಸಲ). ಬಲಗಡೆ ಯಾವುದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ (A A .. A) (AA .. A) ಎಂದು ಭಾಗಮಾಡಿ ಗುಣಿಸಬಹುದು

p, q ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಾದರೆ,

$A^p . A^q = A^{p+q}$ ಮತ್ತು $(A^p)^q = A^{pq}$ ಎಂದು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗುತ್ತದೆ.

Exercises 7·1.

1. Prove that

   (1) $kA \cdot lB = kl \cdot AB$.

   (2) $A(kB) = (kA)B = k(AB)$, (k, l are scalars)

   (3) $-A \cdot -B = AB$.

2. $AI = IA = A$.

3. If A, B are two diagonal matrices of the same order, $AB = BA$.

4. Write down A^p, if A is a diagonal matrix, (p is a positive integer).

5. $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$.

Show that $AB = BA$. Write down A^n.

6. If $A = \begin{pmatrix} \lambda\mu & \mu^2 \\ -\lambda^2 & -\lambda\mu \end{pmatrix}$, $A^2 = 0$.

7. (1) If $kA = 0$ (k is a scalar, $k \neq 0$), then $A = 0$.

   (2) If $kA = kB$, then $A = B$.

8. If A, B are any $(n \times n)$-matrices, expand

   $(A + B)(A - B)$ and $(A + B)^2$.

7·9. *The transpose of a matrix.* By interchanging the rows and columns of a matrix, we obtain another matrix which is called the *transpose* of the former. The transpose of a $(m \times n)$-matrix is a $(n \times m)$-matrix. The transpose of the matrix A is written A'. [The notations A^*, $A^{\top}$ are used by some writers]. The transpose of the transpose is evidently the original matrix, i.e. $(A')' = A$.

ಅಭ್ಯಾಸ 7.1

1. (1) $kA \cdot lB = kl\,AB$

   (2) $A(kB) = (kA)B = k(AB)$

   (k, l ಅದಿಶಗಳು)

   (3) $-A \cdot -B = AB$

   ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

2. $AI = IA = A$.

3. A,B ಒಂದೇ ವರ್ಗದ ಕರ್ಣಕೋಶಗಳಾದರೆ, $AB = BA$.

4. A ಕರ್ಣಕೋಶವಾದರೆ, A^pಯನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ (p ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕ)

5. $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$

   $AB = BA$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ. A^nನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

6. $A = \begin{pmatrix} \lambda\mu & \mu^2 \\ -\lambda^2 & -\lambda\mu \end{pmatrix}$ ಆದರೆ, $A^2 = 0$.

7. (1) $kA = 0$, (k ಅದಿಶ, $k \neq 0$) ಆದರೆ, $A = 0$.

   (2) $kA = kB$ ಆದರೆ, $A = B$.

8. A, B ಯಾವುದೇ $(n \times n)$ ಕೋಶಗಳಾದಾಗ,

   $(A+B)(A-B)$ ಮತ್ತು $(A+B)^3$ ಇವನ್ನು ವಿಸ್ತರಿಸಿ.

7.9. **ಕೋಶದ ಅದಲು.** ಒಂದು ಕೋಶದಲ್ಲಿ ಅಡ್ಡಸಾಲುಗಳನ್ನು ನೀಟಂಸಾಲುಗಳನ್ನಾಗಿಯೂ ನೀಟಂಸಾಲುಗಳನ್ನು ಅಡ್ಡಸಾಲುಗಳನ್ನಾಗಿಯೂ ಪರಿವರ್ತಿಸಿ ಬರೆಯುವುದರಿಂದ ಒದಗುವ ಕೋಶವನ್ನು ಮೊದಲಿನ ಕೋಶದ ಅದಲು ಎನ್ನುವೆವು. $m \times n$ ಕೋಶದ ಅದಲು $n \times m$ ಕೋಶವಾಗುವುದು. A ಕೋಶದ ಅದಲನ್ನು A' ಎಂದು ಬರೆಯುವೆವು. [ಕೆಲವರು A^* ಎಂದೂ, A^T ಎಂದೂ ಬರೆಯುತ್ತಾರೆ] ಅದಲಿನ ಅದಲು ಮೊದಲಿನ ಕೋಶವೇ ಆಗುವುದೆಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟ. ಎಂದರೆ $(A')' = A$.

Ex:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A'=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

If in a square matrix, $a_{ij} = a_{ji}$, i.e. the elements on either side of the principal diagonal, and equidistant from it are equal, then the transpose is identical with the original matrix, i.e. $A' = A$. Such a matrix is called a *symmetric matrix*.

If on the other hand, $a_{ij} = -a_{ij}$, the matrix is said to be *skew-symmetric*. Since this requires $a_{ii} = -a_{ii}$, $a_{ii} = 0$, so that all the elements on the principal diagonal are zero.

Examples :

Symmetric matrix $\begin{pmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{pmatrix}$

Skew-Symmetric matrix $\begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{pmatrix}$

Theorem 2. *If A and B are $(m \times n)$ and $(n \times p)$ matrices respectively, $(AB)' = B'A'$.*

B' and A' are respectively $(p \times n)$ - and $(n \times m)$ -matrices. Hence the product $B'A'$ exists. Also $(AB)'$ and $B'A'$ are both $p \times m$ matrices.

Let $A = (a_{ij})$, $B = (b_{jk})$,

[i from 1 to m, j from 1 to n, k from 1 to p]

The $(k, i)^{th}$ element in $(AB)'$ is the $(i, k)^{th}$ element in

$$(AB) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$$

If we write $B' = (b'_{kj})$, $A' = (a'_{ji})$,

we have $b'_{kj} = b_{jk}$, $a'_{ji} = a_{ij}$

ಉದಾ : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $A' = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

ಚೌಕುಳಿಕೋಶದಲ್ಲಿ, $a_{ij} = a_{ji}$ ಆದರೆ, ಎಂದರೆ ಪ್ರಧಾನಕರ್ಣದಿಂದ ಸಮದೂರದಲ್ಲಿರುವ ಅಂಶಗಳು ಸಮವಿದ್ದರೆ, ಕೋಶವೂ ಅದರ ಅದಲೂ ಒಂದೇ ಆಗುವುದು, ಎಂದರೆ $A' = A$. ಇಂಥ ಕೋಶವನ್ನು **ಸಮಾಂಗಕೋಶ** ಎನ್ನುವೆವು.

ಇದಕ್ಕೆ ಬದಲು $a_{ij} = -a_{ji}$ ಆದರೆ, ಕೋಶವನ್ನು **ವಿಸಮಾಂಗ** ಎನ್ನುವೆವು. ಇದರಲ್ಲಿ $a_{ii} = -a_{ii}$ ಆಗಿರಬೇಕಾದ್ದರಿಂದ, $a_{ii} = 0$. ಎಂದರೆ ಪ್ರಧಾನ ಕರ್ಣದ ಮೇಲಣ ಅಂಶಗಳೆಲ್ಲವೂ ಸೊನ್ನೆಯಾಗಿರಬೇಕು.

ಉದಾ : ಸಮಾಂಗಕೋಶ $\begin{pmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{pmatrix}$

ವಿಸಮಾಂಗಕೋಶ $\begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{pmatrix}$

ಪ್ರಮೇಯ 2. A.B ಎಂಬುವು ಕ್ರಮವಾಗಿ $(m \times n)$. $(n \times p)$ **ಕೋಶಗಳಾದರೆ,** $(AB)' = B'A'$.

$B'.A'$ ಕ್ರಮವಾಗಿ $p \times m$. $n \times m$ ಕೋಶಗಳಾದ್ದರಿಂದ, $B'A'$ ಗಣಲಬ್ಧವಿರುತ್ತದೆ.

$A = (a_{ij})$. $B = (b_{jk})$ ಆಗಿರಲಿ [i 1 ರಿಂದ mವರೆಗೆ, j 1 ರಿಂದ n ವರೆಗೆ, k 1ರಿಂದ p ವರೆಗೆ].

$(AB)'$ ನಲ್ಲಿಯ (k, i) ಅಂಶವು (AB)ಯ (i, k) ಅಂಶ

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{kj}$$

ಮತ್ತು $B' = (b'_{kj})$. $A' = (a'_{ji})$ ಎಂದು ಬರೆದರೆ,

$b'_{kj} = b_{jk}$, $a'_{ji} = a_{ij}$.

$\therefore$ The $(k, i)^{th}$ element in $B'A' = \sum_{j=1}^{n} b'_{kj}\, a'_{ji}$

$$= \sum_{j=1}^{n} b_{jk}\, a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, b_{jk}$$

Hence $(AB)' = B'A'$.

Continuing this, when multiplications are possible,

$$(ABC)' = C'\,(AB)' = C'B'A', \text{ and so on.}$$

Corollary. AA' *is symmetric, i.e. the product of a matrix and its transpose is symmetric.*

For $(AA')' = (A')'\,A' = AA'$.

7·10. A matrix is a set or collection of numbers or other elements arranged in a certain pattern. We have considered certain operations on such sets. The matrix itself has no particular value. But when it is a square matrix, we can form a function out of its elements called a determinant, which has been assigned a definite value as expounded in the last chapter. When A is a square matrix, the determinant formed by its elements is denoted by $|A|$.

Theorem 3. *If A and B are two square matrices of the same order,*

$$|AB| = |A| \cdot |B|.$$

The theorem follows immediately from the multiplication rule for matrices, and the rule for the product of two determinants. (See the remarks at the end of 6·14).

$$\therefore \text{B}'\text{A}'\text{ನಲ್ಲಿ } (k,i) \text{ ಅಂಶ} = \sum_{j=1}^{n} b'_{kj}\, a'_{ji}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} b_{jk}\, a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, b_{jk}$$

ಆದ್ದರಿಂದ $(AB)' = B'A'$.

ಮುಂದುವರಿಸುತ್ತಾ, ಗುಣಾಕಾರಗಳು ಸಾಧ್ಯವಿದ್ದಲ್ಲಿ,

$(A\,B\,C)' = C'\,(AB)' = C'\,B'\,A'$,

ಇತ್ಯಾದಿ.

ಅನುಮಿತ. AA' ಸಮಾಂಗಕೋಶ, ಎಂದರೆ ಒಂದು ಕೋಶದ ಮತ್ತು ಅದರ ಅದಲಿನ ಗುಣಲಬ್ಧವು ಸಮಾಂಗಕೋಶ.

ಏಕೆಂದರೆ, $(AA')' = (A')'\,A' = AA'$

7·10 ಕೋಶವೆಂದರೆ ಒಂದು ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ಬರೆದಿರುವ ಅಂಕಿಗಳ ಅಥವಾ ಇತರ ಅಂಶಗಳ ಒಂದು ಗಣ ಅಥವಾ ಸಮುದಾಯ. ಇಂಥ ಸಮುದಾಯಗಳ ಮೇಲೆ ಕೆಲವು ಪರಿಕರ್ಮಗಳನ್ನು ಕುರಿತು ತಿಳಿಸಿದೆವು. ಕೋಶಕ್ಕೇನೇ ಯಾವುದೊಂದು ಬೆಲೆಯೂ ಇಲ್ಲ. ಆದರೆ ಕೋಶವು ಚೌಕುಳಿ ಕೋಶವಾದರೆ, ಇದರ ಅಂಶಗಳಿಂದ ನಿರ್ಧಾರಕವೆಂಬ ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡಿ, ಹಿಂದಿನ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ಅದಕ್ಕೆ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದ್ದೇವೆ. A ಚೌಕುಳಿಕೋಶವಾದರೆ, ಇದರ ಅಂಶಗಳಿಂದ ಆಗುವ ನಿರ್ಧಾರಕವನ್ನು $|A|$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರಮೇಯದಿಂದ ಈ ಅಧ್ಯಾಯವನ್ನು ಮುಗಿಸುವೆವು ;

ಪ್ರಮೇಯ 3. **A, B ಎಂಬಿವು ಒಂದೇ ವಿಧದ ಎರಡು ಚೌಕುಳಿ ಕೋಶಗಳಾದರೆ,**

$$|AB| = |A| \cdot |B|.$$

ಕೋಶಗಳ ಗುಣಾಕಾರ ಸೂತ್ರದಿಂದಲೂ, ಎರಡು ನಿರ್ಧಾರಕಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಬರೆಯುವ ಕ್ರಮದಿಂದಲೂ (6·14 ಇದರ ಕಡೆಯಲ್ಲಿರುವ ಹೇಳಿಕೆಯನ್ನು ಗಮನಿಸಿ), ಪ್ರಮೇಯವು ಒಡನೆಯೇ ಬರುತ್ತದೆ.

CHAPTER 8

The inverse matrix

8·1. *The inverse of a square matrix.* The determinant formed by the square matrix

$$A \equiv \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots \quad \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots \quad \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

has been denoted by $| A |$. The cofactor of a_{ij} in this determinant has been denoted by A_{ij}, in the previous chapter. Now the transpose of the matrix (A_{ij}) is

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & \cdots \quad \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

This is called the *adjoint matrtx of A*, and will be denoted briefly as adj. A. Multiplying the two matrices,

$$A. \ \text{adj.}\ A = \begin{pmatrix} |A| & 0 & 0 \cdots 0 \\ 0 & |A| & 0 \cdots 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 \cdots |A| \end{pmatrix} \qquad \text{(See 6.8)}$$

When $| A | \neq 0$, we can divide every element of adj. A by $| A |$, and obtain the matrix B.

ಅಧ್ಯಾಯ 8

ಕೋಶದ ಪ್ರತಿಲೋಮ

8.1 ಚೌಕುಳಿಕೋಶದ ಪ್ರತಿಲೋಮ

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \\ a_{n1} & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

ಎಂಬ ಚೌಕುಳಿ ಕೋಶದಿಂದ ಉಂಟಾಗುವ ನಿರ್ಧಾರಕವನ್ನು | A | ಎಂದು ಕರೆದಿದ್ದೇವೆ. ಈ ನಿರ್ಧಾರಕದಲ್ಲಿ, a_{ij} ಅಂಶದ ಸಹಗುಣಕವನ್ನು ಹಿಂದಿನ ಅಧ್ಯಾಯ ದಲ್ಲಿ A_{ij} ಎಂಬ ಚಿಹ್ನೆಯಿಂದ ಸೂಚಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಈಗ (A_{ij}) ಕೋಶದ ಅದಲು

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & \cdots & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಈ ಕೋಶವನ್ನು Aಯ ಸಂಗತ ಕೋಶ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಇದನ್ನು ಸಂಕ್ಷೇಪವಾಗಿ adj A ಎಂದು ಬರೆಯೋಣ.

ಎರಡು ಕೋಶಗಳನ್ನು ಗುಣಿಸಿದರೆ

$$A.\,\text{adj.}\ A = \begin{pmatrix} |A| & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & |A| \end{pmatrix}$$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. (6.8 ನೋಡಿ)

ಆದ್ದರಿಂದ, $|A| \neq 0$ ಆಗಿದ್ದಾಗ, adj. Aನಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿ ಅಂಶವನ್ನೂ | A | ಇಂದ ಭಾಗಿಸಿ, ಇನ್ನೊಂದುಕೋಶ Bನ್ನು ಪಡೆಯೋಣ.

$$B \equiv \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} & \cdots & \frac{A_{n1}}{|A|} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ \frac{A_{1n}}{|A|} & \frac{A_{2n}}{|A|} & \cdots & \frac{A_{nn}}{|A|} \end{pmatrix},$$

so that

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \cdots\cdots 0 \\ 0 & 1 & 0 \cdots\cdots 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots\cdots 1 \end{pmatrix}$$

BA also gives the same matrix.

$\therefore \quad AB = BA =$ the unit matrix I.

The matrix B is called the *inverse of A*. For the existence of the inverse, the condition $|A| \neq 0$ is necessary. When $|A| = 0$, the matrix is said to be *singular*. A singular matrix has no inverse.

8·2. Instead of the above, the inverse of a matrix can b defined by the natural meaning of the term " inverse ".

Definition, *When A is a square matrix, if there exists another matrix B, such that $AB=BA=I$, then B is called the inverse of A.*

Theorem 1. The necessary and sufficient condition for the existence of the inverse is that $|A| \neq 0$.

Necessary. If $AB = I$, $\quad |A| \,.\, |B| = |I| = 1.$ (7·10).

$$\therefore \quad |A| \neq 0.$$

Sufficient. This has been already proved in 8·1.

If $B = \left(\frac{A_{ij}}{|A|}\right)$, $(i, j = 1, 2, \ldots\ldots, n)$, then

$$AB = I = BA.$$

$$B = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} & \cdots & \frac{A_{n1}}{|A|} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ \frac{A_{1n}}{|A|} & \frac{A_{2n}}{|A|} & \cdots & \frac{A_{nn}}{|A|} \end{pmatrix}$$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಈಗ $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ ಆಗುತ್ತದೆ.

BA ಸಹ ಇದೇ ಆಗುತ್ತದೆ.

$\therefore$ AB = BA = ಏಕಮಾನ ಕೋಶ I.

B ಕೋಶವನ್ನು A ಕೋಶದ ಪ್ರತಿಲೋಮವೆನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಪ್ರತಿಲೋಮ ವಿರಬೇಕಾದರೆ. $|A| \neq 0$ ಎಂಬ ನಿರ್ಬಂಧವಿರಬೇಕು. $|A| = 0$ ಆದರೆ(ಕೋಶವನ್ನು ವೈಶೇಷಿಕ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ವೈಶೇಷಿಕಕೋಶಕ್ಕೆ ಪ್ರತಿಲೋಮ ಇರುವುದಿಲ್ಲ.

8.2. ಈ ವಿವರಣೆಯ ಬದಲು, ಕೋಶದ ಪ್ರತಿಲೋಮವನ್ನು ಅದರ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಅರ್ಥದಿಂದಲೇ ವ್ಯಾಖ್ಯೆ ಮಾಡೋಣ.

ವ್ಯಾಖ್ಯೆ. A ಒಂದು ಚೌಕುಳಿ ಕೋಶವಾದರೆ, AB = BA = I ಆಗುವಂತೆ ಇನ್ನೊಂದು ಕೋಶ B ಇದ್ದರೆ, B ನ್ನು A ಯ ಪ್ರತಿಲೋಮ ಎನ್ನುವೆವು.

ಪ್ರಮೇಯ 1. ಪ್ರತಿಲೋಮ ಇರಲು ಬೇಕಾದ ಮತ್ತು ಸಾಕಾದ ನಿರ್ಬಂಧ $|A| \neq 0$.

ಬೇಕು. AB = I ಆದರೆ, $|A| \cdot |B| = |I| = 1$. (7.10)

$\therefore \; |A| \neq 0$.

ಸಾಕು. ಇದನ್ನಾಗಲೇ 8.1 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದ್ದೇವೆ.

$B = \left(\frac{A_{ij}}{|A|}\right)$ ಎಂಬ ಕೋಶವಾದರೆ, $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$

AB = I = BA.

It is also evident that the inverse is unique for a non-singular matrix. This can also be seen otherwise. If possible, let B and C be two different inverses of A.

$$\therefore \quad AB = BA = I, \quad AC = CA = I$$

$$\therefore \quad CAB = C(AB) = CI = C$$

$$\text{and } CAB = (CA)B = IB = B$$

$$\therefore \quad B = C.$$

The inverse of A will hereafter be denoted by A^{-1}.

8·3. Theorem 2. *If A and B are two non-singular matrices of the same order,* $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

It follows from 7·10 that AB too is non-singular.

Therefore AB has an inverse $(AB)^{-1}$.

Now $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1}$, by the associative property

$$= AIA^{-1}$$

$$= (AI)A^{-1} = AA^{-1} = I$$

Similarly $(B^{-1}A^{-1})(AB) = I$.

$\therefore$ The inverse of AB is $B^{-1}A^{-1}$.

Continuing, $(ABC)^{-1} = \{(AB)C\}^{-1}$

$$= C^{-1}(AB)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$$

Similarly, $(A_1 A_2 \cdots\cdots A_k)^{-1} = A_k^{-1} A_{k-1}^{-1} \cdots\cdots A_2^{-1} A_1^{-1}$.

8·4. If k is a positive integer, we have defined A^k as $A \cdot A \cdots\cdots A$ (k times). Hence, its inverse

$$(A^k)^{-1} = (AA\cdots\cdots A)^{-1} = A^{-1} \cdot A^{-1} \cdots\cdots A^{-1}$$

$$\therefore \quad (A^k)^{-1} = (A^{-1})^k.$$

We define this as A^{-k}.

ವೈಶೇಷಿಕವಿಲ್ಲದ ಕೋಶಕ್ಕೆ, ಪ್ರತಿಲೋಮವು ಏಕಮಾತ್ರ ಎಂಬುದೂ ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನು ಬೇರೆ ರೀತಿಯಲ್ಲೂ ತಿಳಿಯಬಹುದು. A ಕೋಶಕ್ಕೆ B, C ಎಂಬ ಎರಡು ಪ್ರತಿ ಲೋಮಗಳಿರಲಿ.

$$\therefore \quad AB = BA = I \qquad AC = CA = I$$

$$\therefore \quad CAB = C(AB) = CI = C$$

ಮತ್ತು $CAB = (CA)B = IB = B$

$$\therefore \quad B = C$$

ಇನ್ನುಮುಂದೆ, Aಯ ಪ್ರತಿ ಲೋಮವನ್ನು A^{-1} ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

8.3. **ಪ್ರಮೇಯ 2.** **A, B ವೈಶೇಷಿಕವಲ್ಲದ ಒಂದೇ ವಿಧದ ಎರಡು ಕೋಶಗಳಾದರೆ, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.**

7.10 ರಿಂದ, AB ಸಹ ವೈಶೇಷಿಕವಲ್ಲ ಎಂಬುದು ತಿಳಿಯುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ AB ಯ ಪ್ರತಿಲೋಮ $(AB)^{-1}$ ಇರುತ್ತದೆ.

ಈಗ $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1}$, ಸಹವರ್ತನಾಗುಣದಿಂದ

$$= AIA^{-1}$$

$$= (AI)A^{-1} = AA^{-1} = I$$

ಹೀಗೆಯೇ $(B^{-1}A^{-1}) = I$

ಆದ್ದರಿಂದ AB ಯ ಪ್ರತಿಲೋಮ $B^{-1}A^{-1}$.

ಮುಂದುವರಿಸುತ್ತಾ, $(ABC)^{-1} = \{(AB)C\}^{-1}$

$$= C^{-1}(AB)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}.$$

ಹೀಗೆಯೇ, $(A_1 A_2 \ldots A_k)^{-1} = A_k^{-1} A_{k-1}^{-1} \ldots A_2^{-1} A_1^{-1}$.

8.4. k ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕವಾದರೆ $A \cdot A \ldots A$ (k ಸಲ) ಎಂಬುದನ್ನು A^k ಎಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಇದರ ಪ್ರತಿಲೋಮ

$$(A^k)^{-1} = (AA \ldots A)^{-1} = A^{-1}.A^{-1}\ldots A^{-1}$$

$$\therefore \quad (A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$$

ಇದನ್ನು A^{-k} ಎಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸುವೆವು.

We can now easily see that the laws of indices

$$A^m \cdot A^n = A^{m+n}$$

$$\left(A^m\right)^n = A^{mn}$$

are true for matrices, for all positive or negative integers m and n, and also for the value zero.

8·5. Theorem 3. *The operations transpose and inverse can be interchanged.*

In other words, $(A^{-1})' = (A')^{-1}$

Proof: $AA^{-1} = A^{-1} A = I$

$$\therefore (AA^{-1})' = (A^{-1} A)' = I' = I$$

$$\therefore (A^{-1})' A' = A'(A^{-1})' = I$$

Therefore, the inverse of A' is $(A^{-1})'$

i.e. $(A')^{-1} = (A^{-1})'$.

8·6. Theorem 4 (i). *If A is a non-singular matrix, and if $AB = 0$, then $B = 0$.*

(ii) *If B is non-singular, and if $AB=0$, then $A=0$.*

In this chapter, all matrices are square matrices, unless otherwise stated. 0 means the null square matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \ldots\ldots 0 \\ \ldots & \ldots \quad \ldots \\ 0 & 0 \ldots\ldots 0 \end{pmatrix}$$

Proof. (i) Since A is non-singular, A^{-1} exists.
Premultiply by A^{-1}, both sides of $AB = 0$.

$$\therefore \quad A^{-1} AB = A^{-1} 0 = 0$$

$$\therefore \quad IB = 0$$

$$\therefore \quad B = 0$$

(ii) Now B^{-1} exists. Post-multiplying by B^{-1},

$$AB B^{-1} = 0 \cdot B^{-1} = 0$$

$\therefore \quad AI = 0 \quad \therefore \quad A = 0.$

ಘಾತನಿಯಮಗಳಾದ $A^m . A^n = A^{m+n}$

$$(A^m)^n = A^{mn}$$

ಎಂಬಿವು m, n ಯಾವುದೇ ಧನ ಅಥವಾ ಋಣ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಿಗೂ ಸೊನ್ನೆಗೂ ಕೋಶಗಳಿಗೆ ನಿಜವಿರುತ್ತವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಸುಲಭವಾಗಿ ಕಾಣಬಹುದು.

8.5 ಪ್ರಮೇಯ 3. **ಪ್ರತಿಲೋಮ ಮತ್ತು ಅದಲು ಎಂಬ ಕ್ರಿಯೆಗಳನ್ನು ಅದಲುಬದಲು ಮಾಡಬಹುದು.**

ಎಂದರೆ $(A^{-1})' = (A')^{-1}$

ಸಾಧನೆ: $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

$\therefore \quad (AA^{-1})' = (A^{-1}A)' = I' = I$

$\therefore \quad (A^{-1})'A' = A'(A^{-1})' = I$

ಆದ್ದರಿಂದ A'ನ ಪ್ರತಿಲೋಮ $(A^{-1})'$

ಅಥವಾ $(A^{-1})' = (A')^{-1}$

8.6. ಪ್ರಮೇಯ 4 (i). **A ವೈಶೇಷಿಕವಲ್ಲದ ಕೋಶವಾಗಿದ್ದರೆ, $AB = 0$ ಆದರೆ $B = 0$.**

(ii) **B ವೈಶೇಷಿಕವಲ್ಲದಿದ್ದರೆ, $AB = 0$ ಆದರೆ $A = 0$.**

ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ, ಅನ್ಯಥಾ ಹೇಳಿದ ಹೊರತು, ಎಲ್ಲ ಕೋಶಗಳೂ ಚೌಕುಳಿ ಕೋಶಗಳು. 0 ಎಂದರೆ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ ಎಂಬ ಚೌಕುಳಿ ಶೂನ್ಯಕೋಶ.

ಸಾಧನೆ, (i) A ವೈಶೇಷಿಕವಲ್ಲದುದರಿಂದ, A^{-1}ಇದೆ.
$AB = 0$ ಇದರ ಎರಡು ಕಡೆಗಳಲ್ಲೂ A^{-1}ರಿಂದ ಹಿಂಗುಣಿಸಿದರೆ,

$$A^{-1}AB = A^{-1}.0 = 0$$

$$\therefore \quad IB = 0$$

$$\therefore \quad B = 0$$

(ii) ಈಗ B^{-1}ಇದೆ. ಈಗ B^{-1}ರಿಂದ ಮುಂಗುಣಿಸಿ

$$AB\,B^{-1} = 0.\,B^{-1} = 0$$

$$\therefore \quad AI = 0 \;\therefore\; A = 0$$

Corollary. If $AB=0$, then either $A=0$, or $B=0$, or else both A and B are singular matrices.

An example has been given in 7·6.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 6 & 12 & 6 \\ 5 & 10 & 5 \end{pmatrix}$$

Here $AB = 0$, but $A \neq 0$, $B \neq 0$.

That A and B are both singular. i.e. $|A| = 0$, and $|B| = 0$ can be verified.

8·7. Theorem 5. *Let A and B be both square matrices of order n, and let B be non-singular: Then there is a unique matrix X such that $A = BX$, and a unique matrix Y such that $A = YB$.*

We can easily see that $X = B^{-1} A$ and $Y = AB^{-1}$. For,

$BX = B(B^{-1} A) = (BB^{-1}) A = IA = A$.

$YB (AB^{-1}) B = A (B^{-1} B) = AI = A$.

If there is another matrix Z such that $A = BZ$,

then $BX = BZ \quad \therefore B(X - Z) = 0$

By Theorem 4 (i), $X - Z = 0 \; \therefore Z = X$.

Thus the solution for X is unique. Similarly Y also is unique. This theorem can be extended to non-square matrices.

Let A be a $(m \times n)$ – matrix, B a non-singular square matrix of order m. Then the equation $A = BX$ has a unique solution $X = B^{-1} A$.

The proof is as above. Since B^{-1} has m columns and A has m rows, the product $B^{-1} A$ exists.

ಅನುಮಿತ : $AB = 0$ **ಆದರೆ** $A = 0$, **ಅಥವಾ** $B = 0$, **ಅಥವಾ** A, B **ಎರಡೂ ವೈಶೇಷಿಕ ಕೋಶಗಳು.**

7.6ರಲ್ಲಿ ಒಂದು ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದ್ದೇವೆ

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 6 & 12 & 6 \\ 5 & 10 & 5 \end{pmatrix}$$

ಇಲ್ಲಿ $AB = 0$, ಆದರೆ $A \neq 0$, $B \neq 0$.

A, B ಎರಡೂ ವೈಶೇಷಿಕ, ಎಂದರೆ $|A| = 0$, $|B| = 0$ ಎಂಬುದನ್ನು ಸುಲಭವಾಗಿ ಅರಿಯಬಹುದು.

8.7 ಪ್ರಮೇಯ 5. **A, B ಎರಡೂ n ಪರಿಮಾಣದ ಚೌಕುಳಿ ಕೋಶಗಳಾಗಿ, B ವೈಶೇಷಿಕವಲ್ಲದಿರಲಿ. ಹಾಗಿದ್ದರೆ, $A = BX$ ಆಗುವಹಾಗೆ ಒಂದೇಒಂದು ಕೋಶ X ಮತ್ತು $A = YB$ ಆಗುವಹಾಗೆ ಒಂದೇ ಒಂದು ಕೋಶ Y ಇರುತ್ತವೆ.**

$X = B^{-1}A$ ಮತ್ತು $Y = AB^{-1}$ ಎಂದು ಸುಲಭವಾಗಿ ತಿಳಿಯಬಹುದು.
ಏಕೆಂದರೆ $BX = B(B^{-1}A) = (BB^{-1})A = IA = A$.

$YB = (AB^{-1})B = A(B^{-1}B) = AI = A$.

$A = BZ$ ಆಗುವಂತೆ ಇನ್ನೊಂದು ಕೋಶ Z ಇದ್ದರೆ

$$BX = BZ \therefore B(X - Z) = 0$$

$\therefore$ ಪ್ರಮೇಯ 4 (i) ರಂತೆ, $X - Z = 0 \therefore Z = X$. ಆದ್ದರಿಂದ, X ಏಕೈಕವಾದ ಕೋಶ ಹೀಗೆಯೇ Y ಯೂ ಏಕೈಕ.

ಈ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಚೌಕುಳಿಯಲ್ಲದ ಕೋಶಗಳಿಗೂ ವಿಸ್ತರಿಸಬಹುದು.

A ಒಂದು $m \times n$ ಕೋಶ, B, m ಪ್ರಮಾಣದ ವೈಶೇಷಿಕವಲ್ಲದ ಚೌಕುಳಿ ಕೋಶವಾದರೆ, $A = BX$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಒಂದೇ ಒಂದು ಮೂಲ $X = B^{-1}A$ ಇರುತ್ತದೆ.

ಸಾಧನೆಯು ಮೇಲಿನಂತೆಯೇ. B^{-1} ನಲ್ಲಿ m ನೀಟುಸಾಲುಗಳಿರು ವುದರಿಂದಲೂ, A ನಲ್ಲಿ m ಅಡ್ಡಸಾಲುಗಳೂ ಇರುವುದರಿಂದ, $B^{-1}A$ ಗುಣಲಬ್ಧ ಸಾಧ್ಯ.

Similarly, *if A is a $(m \times n)$-matrix, C a non-singular square matrix of order n, the equation $A = YC$ has a unique solution $Y = AC^{-1}$.*

Equations like $A = BX$, $A = YC$ are called matrix equations.

8·8. *The determination of the Inverse.* If $A = (a_{ij})$ is a given square matrix, the inverse A^{-1} is obtained by first writing out the matrix (A_{ij}), dividing every element of it by $|A|$, and then writing out its transpose. This is the direct method.

Example (1).

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \text{ Here } |A| = -9 .$$

The cofactors of the elements of the first row are 7, 1, —5. To find the cofactors of the elements of the second row, we bring this row to the first place. By so doing, the sign of the determinant is altered.

$$\therefore \ |A| = -\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

The cofactors of the elements of the first row, taken with the minus sign outside, are —1, —4, 2.

Similarly, $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

The cofactors of the elements of the first row are —4, 2, —1.

$$\therefore \ A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{9}, & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \\ -\frac{1}{9} & \frac{4}{9} & -\frac{2}{9} \\ \frac{5}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

ಹೀಗೆಯೇ A $(m \times n)$ ಕೋಶವಾಗಿ, C, n ಪ್ರಮಾಣದ ವೈಶೇಷಿಕ ವಲ್ಲದ ಚೌಕುಳಿಕೋಶವಾದರೆ, $A = YC$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಒಂದೇ ಒಂದು ಮೂಲ $Y = AC^{-1}$ ಇರುತ್ತದೆ.

ಈ ಪ್ರಕರಣದಲ್ಲಿ ಬರುವ $A = BX$, $A = YC$ ಮುಂತಾದ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಕೋಶಸಮೀಕರಣಗಳು ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

8.8 ಪ್ರತಿಲೋಮವನ್ನು ಪಡೆಯುವಿಕೆ. $A = (a_{ij})$ ಒಂದು ದತ್ತ ಚೌಕುಳಿ ಕೋಶ ವಾದರೆ, ಇದರ ಪ್ರತಿಲೋಮ A^{-1} ಪಡೆಯಲು ಮೊದಲು (A_{ij}) ಕೋಶವನ್ನು ಬರೆದು ಇದರ ಪ್ರತಿ ಅಂಶವನ್ನೂ $|A|$ ಇಂದ ಭಾಗಿಸಿ, ಅನಂತರ ಈ ಕೋಶದ ಅದಲನ್ನು ಬರೆಯಬೇಕು. ಇದು ನೇರವಾದ ವಿಧಾನ.

ಉದಾಹರಣೆ (i) $A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$, ಇಲ್ಲಿ $|A| = -9$

ಮೊದಲನೆಯ ಅಡ್ಡಸಾಲಿನ ಅಂಶಗಳ ಸಹಗುಣಕಗಳು 7, 1, —5.

ಎರಡನೆಯ ಅಡ್ಡಸಾಲಿನ ಸಹಗುಣಕಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಲು, ಈ ಸಾಲನ್ನು ಮೊದಲು ಪ್ರಥಮ ಸ್ಥಾನಕ್ಕೆ ತಂದುಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ. ಹೀಗೆ ಮಾಡುವುದರಿಂದ, ನಿರ್ಧಾರಕದ ಚಿಹ್ನೆ ಬದಲಾಗುತ್ತದೆ.

ಎಂದರೆ $|A| = -\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

ಇದರಲ್ಲಿ ಮೊದಲನೆಯ ಸಾಲಿನ ಅಂಶಗಳ ಸಹಗುಣಕಗಳು ಹೊರಗಿನ— ಚಿಹ್ನೆಯ ಸಮೇತ — 1, —4, 2.

ಹೀಗೆಯೇ $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

ಇದರಲ್ಲಿ ಮೊದಲನೆಯ ಅಡ್ಡಸಾಲಿನ ಅಂಶಗಳ ಗುಣಕಗಳು —4, 2, —1.

$$\therefore A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{7}{-9} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{1}{-9} & \frac{4}{9} & \frac{-2}{9} \\ \frac{5}{9} & \frac{-2}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

When the matrix is of order greater than three, another method will be found simpler. We shall illustrate it with the above example.

Let $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ be column matrices.

The matrix equation $AX = B$ leads to three linear equations

$$\begin{aligned} x_2 + 2x_3 &= b_1 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= b_2 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= b_3. \end{aligned}$$

Solving these in the usual way, we obtain

$$\begin{aligned} x_1 &= -\tfrac{7}{9} b_1 + \tfrac{1}{9} b_2 + \tfrac{4}{9} b_3 \\ x_2 &= -\tfrac{1}{9} b_1 + \tfrac{4}{9} b_2 - \tfrac{2}{9} b_3 \\ x_3 &= \tfrac{5}{9} b_1 - \tfrac{2}{9} b_2 + \tfrac{1}{9} b_3 . \end{aligned}$$

Now $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A^{-1} B.$ Hence, we get A^{-1} by writing down the coefficients of b_1, b_2, b_3 in the above solution, in the same order. We obtain the same result as before.

(2) Determine the inverse of the matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

If $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}$, the matrix equation $AX = B$

ಕೋಶವು ಮೂರನೆಯ ಪ್ರಮಾಣಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡದಾಗಿದ್ದರೆ, ಇನ್ನೊಂದು ವಿಧಾನವು ಇದಕ್ಕಿಂತ ಸುಲಭವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಿಂದ ಇದನ್ನು ವಿಶದಪಡಿಸೋಣ.

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ ಎಂಬಿವು ನೀಟು ಸಾಲು ಕೋಶಗಳಾಗಿರಲಿ.

$AX = B$ ಎಂಬ ಕೋಶ ಸಮೀಕರಣವು

$$x_2 + 2x_3 = b_1$$
$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 = b_2$$
$$2x_1 + x_2 + 3x_3 = b_3$$

ಎಂಬ ಮೂರು ಸರಳಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಕೊಡುತ್ತದೆ. ಇವನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯ ರೀತಿಯಿಂದ ಸಾಧಿಸಿದರೆ,

$$x_1 = -\tfrac{7}{9} b_1 + \tfrac{1}{9} b_2 + \tfrac{4}{9} b_3$$
$$x_2 = -\tfrac{1}{9} b_1 + \tfrac{4}{9} b_2 - \tfrac{2}{9} b_3$$
$$x_3 = \tfrac{5}{9} b_1 - \tfrac{2}{9} b_2 + \tfrac{1}{9} b_3$$

ಎಂದು ಬರುತ್ತದೆ. $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A^{-1}B$ ಆದ್ದರಿಂದ, b_1, b_2, b_3 ಗಳ ಗುಣಕಗಳನ್ನು ಅದೇ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಬರೆದರೆ, A^{-1} ಕೋಶ ದೊರಕುತ್ತದೆ. ಮೇಲಿನ ಉತ್ತರವೇ ಬರುತ್ತದೆ.

(2) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & -0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ ಕೋಶದ ಪ್ರತಿಲೋಮವನ್ನು ಪಡೆಯಿರಿ.

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}$ AXಆದರೆ, $= B$ ಎಂಬ ಕೋಶಸಮೀಕರಣವು

leads to the four equations

$$x_2 + 2x_3 + 2x_4 = b_1 \qquad \text{(i)}$$
$$-x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = b_2 \qquad \text{(ii)}$$
$$x_2 + x_3 + 2x_4 = b_3 \qquad \text{(iii)}$$
$$3x_1 \quad -2x_3 + x_4 = b_4 \qquad \text{(iv)}$$

We solve these as follows : -

(i) — (iii) $\quad x_3 = b_1 - b_3 \qquad$ (v)

(ii) — 2(iii) $\quad -x_1 - x_4 = b_2 - 2b_3$

From (iv) and (v) $\quad 3x_1 + x_4 = 2b_1 - 2b_3 + b_4$

$$\therefore \; 2x_1 = 2b_1 + b_2 - 4b_3 + b_4$$

$$\text{or} \quad x_1 = b_1 + \tfrac{1}{2}b_2 - 2b_3 + \tfrac{1}{2}b_4$$

$$\therefore \; x_4 = -b_1 - \tfrac{3}{2}b_2 + 4b_3 - \tfrac{1}{2}b_4$$

From (iii), $x_2 = b_1 + 3b_2 - 6b_3 + b_4$

$$\therefore \; A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -2 & \frac{1}{2} \\ 1 & 3 & -6 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & \frac{3}{2} & 4 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Verification.

Verify that $AA^{-1} = A^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercises 8.1.

1. Determine the inverses of the following matrices : Verify.

(1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$x_2 + 2x_3 + 2x_4 = b_1 \quad \text{(i)}$$
$$-x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = b_2 \quad \text{(ii)}$$
$$x_2 + x_3 + 2x_4 = b_3 \quad \text{(iii)}$$
$$3x_1 - 2x_3 + x_4 = b_4 \quad \text{(iv)}$$

ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣಗಳಿಗೆ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಇವುಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸುತ್ತಾ

$$\text{(i)} - \text{(iii)} \qquad x_3 = b_1 - b_3 \qquad \text{(v)}$$

$$\text{(ii)} - 2\,\text{(iii)} - x_1 - x_4 = b^2 - 2b_3$$

(iv), (v) ರಿಂದ $3x_1 + x_4 = 2b_1 - 2b_3 + b_4$

$$\therefore\ 2x_1 = 2b_1 + b_2 - 4b_3 + b_4$$
$$\therefore\ x_1 = b_1 + \tfrac{1}{2}b_2 - 2b_3 + \tfrac{1}{2}b_4$$
$$x_4 = -b_1 - \tfrac{3}{2}b_2 + 4b_3 - \tfrac{1}{2}b_4$$

(iii)ರಿಂದ, $x_2 = b_1 + 3b_2 - 6b_3 + b_4$

$$\therefore\ A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -2 & \frac{1}{2} \\ 1 & 3 & -6 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -\frac{3}{2} & 4 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

ತಾಳೆ. $AA^{-1} = A^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ಎಂದು ನೋಡಿ.

ಅಭ್ಯಾಸ 8.1

1. ಈ ಕೋಶಗಳ ಪ್ರತಿಲೋಮಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಿರಿ. ತಾಳೆ ನೋಡಿರಿ.

(1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

2. If $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

3. Prove that $| A^{-1} | = | A |^{-1}$. [Here -1 has been used in two senses.]

---

(3) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

2. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ ಆದರೆ, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

3. $| A^{-1} | = | A |^{-1}$. (-1 ಇಲ್ಲಿ ಎರಡು ಅರ್ಥಗಳಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಿಸಲ್ಪಟ್ಟದೆ) ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

CHAPTER 9.

The Rank of a Matrix

9·1. If A is a $(m \times n)$ —matrix, we can select r rows and r columns out of it, and construct a determinant of order r. The value of r may be any number equal to or less than the smaller of the two numbers m and n.

Definition. *A matrix is said to be of rank* **r**, *if at least one determinant of order* **r** *that can be formed out of it is not* **zero,** *while all determinants of order* $r+1$ *vanish.*

If all determinants of order $r+1$ vanish, it will be evident from the rules for the expansion of determinants that all determinants of higher order also vanish.

Examples : (1)
$$\begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & p & q & r \\ 1 & a & b & c \\ 0 & p & q & r \end{pmatrix}$$

Every determinant of the third order that can be formed out of this will have two rows identical, and hence vanishes. Some determinants of the second order also vanish, but all do not vanish.

Thus $\begin{vmatrix} 1 & a \\ 0 & p \end{vmatrix} = p \neq 0$. Hence the matrix is of rank 2.

(2)
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & -2 & 1 & 4 \\ -1 & -3 & 1 & -11 & -5 \end{pmatrix}$$

ಅಧ್ಯಾಯ 9

ಕೋಶದ ದರ್ಜೆ

9. 1. A ಒಂದು $m \times n$ ಕೋಶವಾದರೆ, ಅದರಲ್ಲಿ r ಅಡ್ಡ ಸಾಲುಗಳನ್ನೂ r ನೀಟು ಸಾಲುಗಳನ್ನೂ ಆರಿಸಿಕೊಂಡು ಇವುಗಳಲ್ಲಿರುವ ಅಂಶಗಳಿಂದ r ಪರಿಮಾಣದ ನಿರ್ಧಾರಕವನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದು. r ನ ಬೆಲೆ m, n ಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದು ಕನಿಷ್ಠವೋ ಅದಕ್ಕೆ ಸಮವಾಗಿ, ಅಥವಾ ಅದಕ್ಕಿಂತ ಚಿಕ್ಕದಾಗಿ ಇರಬಹುದು.

ವ್ಯಾಖ್ಯೆ. ಒಂದು ಕೋಶದಿಂದ ಪಡೆಯಬಹುದಾದ ನಿರ್ಧಾರಕಗಳ ಪೈಕಿ r ಪರಿಮಾಣದ ಒಂದಾದರೂ ನಿರ್ಧಾರಕದ ಬೆಲೆ ಸೊನ್ನೆಯಾಗದೆ, $r+1$ ಪರಿಮಾಣದ ಎಲ್ಲಾ ನಿರ್ಧಾರಕಗಳ ಬೆಲೆಯೂ ಸೊನ್ನೆಯಾದರೆ, ಕೋಶದ ದರ್ಜೆ r ಎನ್ನುವೆವು.

$(r+1)$–ನಿರ್ಧಾರಕಗಳೆಲ್ಲವೂ 0 ಆದರೆ, $(r+2)$ – ನಿರ್ಧಾರಕಗಳು 0 ಎಂಬುದು ನಿರ್ಧಾರಕಗಳ ವಿಸ್ತರಣೆಯ ನಿಯಮಗಳಿಂದ ಒಡನೆಯೇ ಫಲಿಸುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು.

(1) $$\begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & p & q & r \\ 1 & a & b & c \\ 0 & p & q & r \end{pmatrix}$$

ಈ ಕೋಶದಿಂದ ಪಡೆಯಬಹುದಾದ 3 ನೆಯ ಪರಿಮಾಣದ ಎಲ್ಲಾ ನಿರ್ಧಾರಕಗಳಲ್ಲೂ ಎರಡು ಸಾಲುಗಳು ಒಂದೇ ಆಗಿರುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಇವುಗಳ ಬೆಲೆ 0. ಎರಡನೆಯ ಪರಿಮಾಣದ ನಿರ್ಧಾರಕಗಳಲ್ಲಿ ಕೆಲವುಗಳ ಬೆಲೆ 0, ಆದರೆ ಎಲ್ಲವುಗಳ ಬೆಲೆ ಸೊನ್ನೆಯಲ್ಲ.

ಉದಾ : $\begin{vmatrix} 1 & a \\ 0 & p \end{vmatrix} = p \neq 0$ ಆದ್ದರಿಂದ, ಕೋಶದ ದರ್ಜೆ 2.

(2) $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & -2 & 1 & 4 \\ -1 & -3 & 1 & -11 & -5 \end{pmatrix}$$

All determinants of the third order that can be formed out of the matrix vanish, but $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1.$

Hence the matrix is of rank 2.

(3) $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 7 & 15 \end{pmatrix}.$$ $|A| \neq 0$. Hence the rank of the matrix is 3.

The null matrix will be considered to be of rank 0. It will be evident from the properties of determinants that a matrix and its transpose are of the same rank.

If A is a non-singular square $(n \times n)$—matrix, A and A^{-1} are both of the same rank n.

9·2. The determination of the rank of a matrix direct from the definition generally involves considerable labour, except in simple cases. We therefore consider a method of transforming the matrix so that its rank is unaltered and can also be easily obtained. We use three types of operations on a matrix, which will be called *elementary transformations*.

(1) Interchange of two rows or columns.

(2) Multiplying the elements of a row or column by a constant k ($\neq 0$).

(3) Adding to a row (or column) another row (or column) multiplied by k.

When a matrix has been transformed in any of these ways, the operation of converting the transformed matrix back to its original form will be called the inverse transformation. Evidently, the inverse transformation is of the same nature as the original transformation, i.e. it is also an "elementary transformation."

ಇದರಿಂದ ಪಡೆಯಬಹುದಾದ ಮೂರನೆಯ ಪ್ರಮಾಣದ ಎಲ್ಲ ನಿರ್ಧಾರಕಗಳ ಬೆಲೆಯೂ 0. ಆದರೆ

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1$$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಕೋಶದ ದರ್ಜೆ 2.

(3)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 7 & 15 \end{pmatrix} \cdot \; |A| \neq 0.$$ ಆದ್ದರಿಂದ ಕೋಶದ ದರ್ಜೆ 3.

ಶೂನ್ಯಕೋಶದ ದರ್ಜೆಯನ್ನು 0 ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಒಂದು ಕೋಶವೂ ಅದರ ಅದಲೂ ಒಂದೇ ದರ್ಜೆಯುವು ಎಂಬುದು ನಿರ್ಧಾರಕಗಳ ಗುಣಗಳಿಂದ ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗುತ್ತದೆ,

A ಒಂದು $n \times n$ ಚೌಕುಳಿ ವೈಶೇಷಿಕವಲ್ಲದ ಕೋಶವಾದರೆ, A ಮತ್ತು A^{-1} ಎರಡೂ n ದರ್ಜೆಯುವು.

9.2 ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯಿಂದಲೇ ನೇರವಾಗಿ ಒಂದು ಕೋಶಧ ದರ್ಜೆಯನ್ನು ಪಡೆಯುವುದು ಸುಲಭಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಹೊರತು ಅಧಿಕವಾದ ಶ್ರಮವನ್ನು ಒಳ ಗೊಳ್ಳುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ದರ್ಜೆಯು ವ್ಯತ್ಯಾಸಗೊಳ್ಳದಂತೆ, ಕೋಶವನ್ನು ರೂಪಾಂತರಗೊಳಿಸಿ ಹೆಚ್ಚುಶ್ರಮವಿಲ್ಲದೆ ದರ್ಜೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ವಿಧಾನ ವನ್ನು ಅಭ್ಯಸಿಸುವೆವು. ಒಂದು ದತ್ತಕೋಶದಮೇಲೆ, ಮೂರು ತರದ ಪರಿಕರ್ಮ ಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವೆವು. ಇವಕ್ಕೆ **ಸುಲಭ ರೂಪಾಂತರಗಳು** ಎಂದು ಹೆಸರು.

(1) ಕೋಶದ ಎರಡು (ಅಡ್ಡ ಅಥವಾ ನೀಟು) ಸಾಲುಗಳನ್ನು ಅದಲು ಬದಲು ಮಾಡುವಿಕೆ.

(2) ಒಂದು ಸಾಲಿನ ಅಂಶಗಳನ್ನೆಲ್ಲಾ ಒಂದು ಸ್ಥಿರಸಂಖ್ಯೆ k ($\neq 0$) ಇಂದ ಗುಣಿಸುವಿಕೆ.

(3) ಒಂದುಸಾಲಿಗೆ ಮತ್ತೊಂದುಸಾಲನ್ನು k ಇಂದ ಗುಣಿಸಿ ಕೂಡುವಿಕೆ.

ಕೋಶವನ್ನು ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಒಂದರಿಂದ ರೂಪಾಂತರಿಸಿದಮೇಲೆ, ರೂಪಾಂತರ ಹೊಂದಿದ ಕೋಶವನ್ನು ಹಿಂದಿನರೂಪಕ್ಕೆ ತರುವ ಪರಿಕರ್ಮಕ್ಕೆ ನಾವು ಉಪಯೋಗಿಸಿದ ರೂಪಾಂತರದ ಪ್ರತಿಲೋಮವೆನ್ನುವೆವು. ಈ ಪ್ರತಿಲೋಮದ ಸ್ವರೂಪವೂ ಮೇಲಿನಂತೆಯೇ ಎಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟ. ಆದ್ದರಿಂದ ಪ್ರತಿಲೋಮವೂ ಸುಲಭ ರೂಪಾಂತರವೇ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

Theorem 1. *The rank of a matrix is unaltered by an elementary transformation.*

Proof. For the transformations (1) and (2), the theorem readily follows from the properties of determinants. A proof is required for transformation (3) only.

Let us first show that the rank of the matrix is not increased by this transformation. If the matrix is a $(m \times n)$-matrix, and the rank is the smaller of the numbers m and n (say m, m = the number of rows), a transformation can not increase the rank. On the other hand, suppose the rank is r, smaller than m or n. Therefore, all determinants of order $r + 1$ in the matrix are zero. Let us consider any determinant of order $r + 1$ in the matrix obtained after effecting a transformation of type (3). This may be the determinant occupying the same position in the original matrix. Then its value is zero. If this is not the case, one row (or column) in it is the sum of a row (or column) of the original matrix added to another multiplied by k. The value of the determinant can therefore be expressed as $D_1 + kD_2$. Here D_1 is a determinant of order $r + 1$ in the original matrix. $\therefore$ $D_1 = 0$. D_2 also may be a determinant of order $r + 1$ of the original matrix, otherwise it has two rows (or columns) identical. So, in both cases $D_2 = 0$. Hence in the new matrix also, all $(r + 1)$–order determinants vanish. The rank of the new matrix is therefore $\leqslant r$. The transformation (3) cannot therefore increase the rank. If possible, suppose the rank is decreased. By applying the inverse transformation to the new matrix, the original matrix is obtained. The inverse transformation has therefore increased the rank. But this is not possible, since the inverse transformation is also an elementary transformation. The proof is thus complete.

9·3. *Reduction of a matrix to its normal form. The "Sweep-out" Process.*

ಪ್ರಮೇಯ 1. **ಸುಲಭರೂಪಾಂತರದಿಂದ, ಕೋಶದ ದರ್ಜೆಯು ವ್ಯತ್ಯಾಸವಾಗುವುದಿಲ್ಲ.**

ಸಾಧನೆ: (1) ಮತ್ತು (2)ನೇ ರೂಪಾಂತರಗಳಿಗೆ, ಪ್ರಮೇಯವು ನಿರ್ಧಾರಕಗಳ ಗುಣಗಳಿಂದ ಒಡನೆಯೇ ಒದಗುತ್ತದೆ. (3)ನೇ ರೂಪಾಂತರಕ್ಕೆ ಮಾತ್ರ ಸಾಧನೆ ಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ.

ಈ ರೂಪಾಂತರದಿಂದ, ಕೋಶದ ದರ್ಜೆ ಹೆಚ್ಚುವುದಿಲ್ಲವೆಂದು ಮೊದಲು ತೋರಿಸೋಣ. ಕೋಶವು $m+n$ ಕೋಶವಾಗಿ, ದರ್ಜೆಯು m, nಗಳ ಕನಿಷ್ಠ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೆ, [ಉದಾ: m ಎನ್ನಿ, $m =$ ಅಡ್ಡಸಾಲುಗಳಸಂಖ್ಯೆ], ರೂಪಾಂತರ ದಿಂದ ಇದು ಹೆಚ್ಚಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ದರ್ಜೆಯು m, n ಗಳಿಗಿಂತ ಚಿಕ್ಕದಾದ ಸಂಖ್ಯೆ r ಎನ್ನೋಣ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಕೋಶದಲ್ಲಿ $r+1$ ಪರಿಮಾಣದ ನಿರ್ಧಾರಕಗಳೆಲ್ಲವೂ ಸೊನ್ನೆ. ರೂಪಾಂತರ (3)ನ್ನು ಪ್ರಯೋಗಿಸಿದನೇಲೆ, ಬಂದ ಕೋಶದಲ್ಲಿ $r+1$ ಪರಿಮಾಣದ ಯಾವುದೇ ನಿರ್ಧಾರಕವನ್ನು ಆರಿಸೋಣ. ಇದು ಹಿಂದಿನ ಕೋಶದಲ್ಲಿ ಅದೇ ಸ್ಥಾನವುಳ್ಳ ನಿರ್ಧಾರಕವಾಗಿರಬಹುದು. ಆಗ ಅದರ ಬೆಲೆ ಸೊನ್ನೆ. ಹಾಗಿಲ್ಲದಿದ್ದರೆ, ಅದರಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸಾಲು ಹಿಂದಿನ ನಿರ್ಧಾರಕದ ಒಂದು ಸಾಲಿಗೆ k ಇನ್ನೊಂದು ಸಾಲನ್ನು ಕೂಡಿ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ನಿರ್ಧಾರಕದ ಬೆಲೆಯನ್ನು $D_1 + kD_2$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. ಇಲ್ಲಿ D_1 ಎಂಬುದು ಹಿಂದಿನ ಕೋಶದ $(r+1)$ — ಪರಿಮಾಣದ ನಿರ್ಧಾರಕ $\therefore D_1 = 0$. D_2 ಸಹ ಹಿಂದಿನ ಕೋಶದ $(r+1)$ — ಪರಿಮಾಣದ ನಿರ್ಧಾರಕವಾಗಿರಬಹುದು, ಇಲ್ಲದಿದ್ದರೆ ಅದರಲ್ಲಿ ಎರಡು ಸಾಲುಗಳು ಒಂದೇ ಆಗುತ್ತವೆ. ಎರಡೂ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲೂ $D_2 = 0$. ಆದ್ದರಿಂದ ಹೊಸ ಕೋಶದಲ್ಲಿ $(r+1)$ — ಪರಿಮಾಣದ ನಿರ್ಧಾರಕಗಳೆಲ್ಲವೂ ಸೊನ್ನೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಹೊಸಕೋಶದ ದರ್ಜೆ $\leqslant r$. ಆದ್ದರಿಂದ, ರೂಪಾಂತರ (3)ರಿಂದ ದರ್ಜೆ ಹೆಚ್ಚುವುದಿಲ್ಲ. ಸಾಧ್ಯವಾದರೆ, ಕಡಮೆಯಾಗಲಿ. ಹೊಸಕೋಶಕ್ಕೆ (3)ರ ಪ್ರತಿಲೋಮವನ್ನು ಪ್ರಯೋಗಿಸಿದರೆ, ಹಿಂದಿನಕೋಶ ಬರುವುದು. ಆದ್ದರಿಂದ, ಪ್ರತಿಲೋಮವು ದರ್ಜೆಯನ್ನು ಹೆಚ್ಚಿಸಿದಂತಾಗುತ್ತದೆ. ಪ್ರತಿಲೋಮವೂ (3)ರಂತೆಯೇ ಸುಲಭ ರೂಪಾಂತರವಾದ್ದರಿಂದ, ಇದು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಪ್ರಮೇಯದ ಸಾಧನೆಯು ಪೂರ್ಣವಾಯಿತು.

9.3. ಒಂದು ಕೋಶವನ್ನು ಸುಲಭರೂಪಕ್ಕೆ ತರುವಿಕೆ. ಮಾರ್ಜನಕ್ರಿಯೆ.

The method will be explained through an example.

Let $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & -4 & 5 \\ -1 & -2 & -1 & -4 \end{pmatrix}$

Subtract the first row multiplied by 2, from the second row. Add the first row to the third. The resulting matrix is

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

The rank is unaltered by the transformations that we are using. This will be indicated by the symbol $\sim$. This symbol has been used in chapter 1 to denote an equivalence relation. We shall define an equivalence relation between two $(m \times n)$-matrices, if they are of the same rank. It will be evident that the properties of equivalence relation hold good for matrices.

Continuing, similarly,

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

In the last matrix, all third-order determinants vanish.

But $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$. The rank of A is therefore 2.

We shall now explain the method of transforming any non-null matrix into its simplest form, without altering the rank. Let the matrix be

ಒಂದು ಉದಾಹರಣೆಯಿಂದ ವಿಧಾನವನ್ನು ತಿಳಿಸುವ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & -4 & 5 \\ -1 & -2 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

ಇದರಲ್ಲಿ ಮೊದಲನೆಯ ಅಡ್ಡಸಾಲನ್ನು 2ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ, ಎರಡನೆಯ ಅಡ್ಡಸಾಲಿನಿಂದ ಇದನ್ನು ಕಳೆಯೋಣ.

ಮೂರನೆಯ ಅಡ್ಡಸಾಲಿಗೆ ಮೊದಲನೆಯದನ್ನು ಕೂಡೋಣ.

ಈಗ ಬರುವ ಕೋಶ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

ನಾವು ಉಪಯೋಗಿಸಿರುವ ಪರಿಕರ್ಮಗಳಿಂದ, ದರ್ಜೆಯು ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಹೊಂದುವುದಿಲ್ಲ. ಇದನ್ನು $\sim$ ಎಂಬ ಚಿಹ್ನೆಯಿಂದ ತೋರಿಸುವೆವು. ಅಧ್ಯಾಯ 1ರಲ್ಲಿ ಇದನ್ನು ಸಮಾನತೆಯ ಚಿಹ್ನೆಯೆಂದು ಕರೆದಿರುವೆವು. ಎರಡು $m \times n$ ಕೋಶಗಳು ಒಂದೇ ದರ್ಜೆಯವುಗಳಾದರೆ, ಅವು ಸಮಾನತೆಯನ್ನು ಪಡೆದಿರುವುವು ಎಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸುವೆವು. ಸಮಾನತೆಯು ಗುಣಗಳು ಕೋಶಗಳಿಗೆ ನಿಜವಿರುತ್ತವೆಯೆಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟ.
ಹೀಗೆಯೇ ಮುಂದುವರೆಸುತ್ತ,

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ಕಡೆಯ ಕೋಶದಲ್ಲಿ ಮೂರನೆಯ ಪರಿಮಾಣದ ನಿರ್ಧಾರಕಗಳೆಲ್ಲವೂ ಸೊನ್ನೆಯಾಗುತ್ತವೆ.

ಆದರೆ $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$. ಆದ್ದರಿಂದ, A ಕೋಶದ ದರ್ಜೆ 2.

ಈಗ ಯಾವುದೇ ಅಶೂನ್ಯಕೋಶವನ್ನು, ಅದರ ದರ್ಜೆಯು ಬದಲಾಗದಂತೆ ಅದೇ ರೂಪದ ಅತಿಸುಲಭ ಆಕೃತಿಗೆ ಪರಿವರ್ತಿಸುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ವಿವರಿಸುವೆವು. ಕೋಶವನ್ನು

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Since A is not a null-matrix, at least one element of it is not zero. If $a_{11} \neq 0$, we shall be using this itself. If $a_{11}=0$, let $a_{ij} = k \neq 0$, (where i and j are not both 1). By interchanging the first row and the ith row, and then the jth column with the first column, the first element in the matrix becomes k By now dividing the first row by k, the first element in the resulting matrix beeomes 1. Let us call this matrix as

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \cdots & c_{1j} \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots\ \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m1} & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}, \text{ where } c_{11}=1.$$

From the second column here, subtract the first column multiplied by c_{12}; from the third column, subtract the first column multiplied by c_{13}; and so on. In the resulting matrix, the first row becomes 1 0 0......O. Treat the rows similarly. The first column becomes.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

The matrix has now become

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \ldots & 0 \\ 0 & d_{22} & d_{23} & d_{2n} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & d_{m2} & \cdots & d_{mn} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & & a_{2n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{m1} & \dots & & a_{mn} \end{pmatrix}$$

ಎಂದು ಬರೆಯುವೆವು. ಕೋಶವು ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದುದರಿಂದ, ಅದರ ಒಂದು ಅಂಶವಾದರೂ ಸೊನ್ನೆಯಲ್ಲ. $a_{11} \neq 0$ ಆದರೆ, ಅದನ್ನೇ ಉಪಯೋಗಿಸುವೆವು. $a_{11}=0$ ಆದರೆ, $a_{ij}=k\neq 0$ ಆಗಿರಲಿ, (i, j ಎರಡೂ 1 ಅಲ್ಲ). i ನೇ ಅಡ್ಡ ಸಾಲನ್ನು ಮೊದಲನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲಿನೊಡನೆ ಬದಲಾಯಿಸಿ, ಅನಂತರ j ನೇ ನೀಟು ಸಾಲನ್ನು ಮೊದಲನೇ ನೀಟುಸಾಲಿನೊಡನೆ ಬದಲಾಯಿಸಿದಮೇಲೆ. ಕೋಶದ ಮೊದಲನೇ ಅಂಶವು k ಆಗುತ್ತದೆ. ಮೊದಲನೆಯ ಅಡ್ಡಸಾಲನ್ನು k ಇಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ, ಬರುವ ಕೋಶದ ಮೊದಲನೆಯ ಅಂಶವು 1 ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಕೋಶವನ್ನು

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1j} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & & \dots & & \dots \\ c_{m1} & \dots & & \dots & & \dots \end{pmatrix}$$

ಎಂದು ಕರೆಯೋಣ ; ಇಲ್ಲಿ $c_{11}=1$

ಇದರಲ್ಲಿ 2ನೇ ನೀಟುಸಾಲಿನಿಂದ ಮೊದಲನೇ ನೀಟು ಸಾಲನ್ನು c_{12} ಇಂದ ಗುಣಿಸಿ ಕಳೆಯಿರಿ ; 3ನೇ ನೀಟುಸಾಲಿನಿಂದ ಮೊದಲನೇ ನೀಟು ಸಾಲನ್ನು c_{13} ಇಂದ ಗುಣಿಸಿ. ಕಳೆಯಿರಿ ; ಇತ್ಯಾದಿ ಬರುವ ಕೋಶದಲ್ಲಿ, ಮೊದಲನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲು 1 0 0 .... 0 ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಅಡ್ಡಸಾಲುಗಳಿಗೂ ಮಾಡಿ.

ಮೊದಲನೇ ನೀಟುಸಾಲು $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ ಆಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಕೋಶವು

ಈಗ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{22} & d_{23} & & d_{2n} \\ 0 & \dots & \dots & & \dots \\ \vdots & \dots & \dots & & \dots \\ 0 & d_{m2} & \dots & & d_{nn} \end{pmatrix}$ ಆಗುತ್ತದೆ.

Now transform the matrix $\begin{pmatrix} d_{22} & \cdots & d_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ d_{m2} & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$ similarly.

Continuing this process, the matrix takes one of the following forms:

$$\begin{pmatrix} I_r \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ or } (I_r, 0), \text{ or } \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ or } (I_r),$$

where I_r is the $(r \times r)$-unit matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \cdots\cdots 0 \\ 0 & 1 & 0 \cdots\cdots 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 \cdots\cdots\cdots & 1 \end{pmatrix} \quad (r \text{ rows}),$$

and 0 denotes the null-matrix. The rank of the matrix obtained is r. Since only elementary transformations have been employed at every step, the original matrix is also of rank r.

9.4. One or two illustrations are given below. The elementary transformations employed will be denoted by the following signs:

1. Interchange of the ith and jth rows: R_{ij}
2. Multiplication of the ith row by k: $R_i\ (k)$.
3. Adding to the ith row, the jth row multiplied by k. $R_{ij}\ (k)$.

The same operations for columns will be denoted by C_{ij}, $C_i\ (k)$, $C_{ij}\ (k)$.

Examples :—

(1) $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 5 & 1 & -1 \\ -1 & 9 & 6 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 2 & -2 \\ -1 & 10 & 5 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 2 & -2 \\ 0 & 10 & 5 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} d_{22} & \cdots & d_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ d_{m2} & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$ ಕೋಶವನ್ನು ಹೀಗೆಯೇ ಪರಿವರ್ತಿಸಿ.

ಹೀಗೆ ಮುಂದುವರಿಸುತ್ತಾ ಹೋದರೆ, ಕಡೆಯಲ್ಲಿ ಕೋಶವು

$\begin{pmatrix} I_r \\ 0 \end{pmatrix}$, ಅಥವಾ $(I_r, 0)$, ಅಥವಾ $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, ಅಥವಾ (I_r)

ಎಂಬ ರೂಪವನ್ನು ತಾಳುವುವು. ಇಲ್ಲಿ, I_r ಎಂಬುದು $(r \times r)$ ಏಕಮಾನ ಕೋಶ.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$ (r ಸಾಲುಗಳು), 0 ಎಂಬುದು ಶೂನ್ಯಕೋಶ,

ಬಂದ ಕೋಶದ ದರ್ಜೆ r. ಪ್ರತಿ ಹೆಜ್ಜೆಯಲ್ಲಿಯೂ ಸುಲಭ ರೂಪಾಂತರಗಳನ್ನೇ ಉಪಯೋಗಿಸುವುದರಿಂದ, ನಾವು ಆರಂಭಿಸಿದ ಕೋಶ A ಸಹಾ r ದರ್ಜೆಯದಾಗಿದೆ.

9.4 ಒಂದೆರಡು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಕೊಡುವೆವು. ಉಪಯೋಗಿಸಿರುವ ಸುಲಭ ರೂಪಾಂತರಗಳನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಚಿಹ್ನೆಗಳಿಂದ ತಿಳಿಸುವೆವು:

1. iನೇ ಮತ್ತು jನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲುಗಳ ಅದಲು ಬದಲಿಗೆ R_{ij} ಎಂದೂ
2. iನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲನ್ನು k ಇಂದ ಗುಣಿಸುವುದನ್ನು $R_i(k)$ ಎಂದೂ
3. iನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲಿಗೆ jನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲನ್ನು k ಇಂದ ಗುಣಿಸಿ, ಕೂಡುವುದನ್ನು $R_{ij}(k)$ ಎಂದೂ ಬರೆಯುವೆವು:

ನೀಟುಸಾಲುಗಳಿಗೆ ಇದೇ ಕ್ರಿಯೆಗಳನ್ನು C_{ij}, $C_i(k)$, $C_{ij}(k)$ ಎಂದು ಬರೆಯುವೆವು.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು: (1) A =

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 5 & 1 & -1 \\ -1 & 9 & 6 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 2 & -2 \\ -1 & 10 & 5 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 2 & -2 \\ 0 & 10 & 5 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 4 & 2 & -2 \\ 0 & 10 & 5 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

The rank is 2.

The transformations employed are:

(i) $C_{21}(-1)$, $C_{31}(1)$, $C_{41}(-1)$

(ii) $R_{21}(1)$, $R_{31}(-1)$, $R_{41}(1)$

(iii) $R_2(\frac{1}{2})$

(iv) $C_{32}(-\frac{1}{2})$, $C_{42}(\frac{1}{2})$

(v) $R_{32}(-4)$, $R_{42}(-10)$.

(2) Reduce to normal form:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & -1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 7 & 6 & 10 & 11 \end{pmatrix}$$

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & -7 & -6 & -10 & -11 \\ 0 & 5 & 7 & 6 & 10 & 11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -7 & -5 & -10 & -11 \\ 0 & 5 & 7 & 6 & 10 & 11 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -\frac{7}{5} & -\frac{6}{5} & -\frac{10}{5} & -\frac{11}{5} \\ 0 & 5 & 7 & 6 & 10 & 11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 4 & 2 & -2 \\ 0 & 10 & 5 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ದರ್ಜೆ $= 2$

ಉಪಯೋಗಿಸಿರುವ ರೂಪಾಂತರಗಳು.

(i) $C_{21}(-1)$, $C_{31}(1)$, $C_{41}(-1)$

(ii) $R_{21}(1)$, $R_{31}(-1)$, $R_{41}(1)$

(iii) $R_2(\frac{1}{2})$.

(iv) $C_{32}(-\frac{1}{2})$, $C_{42}(\frac{1}{2})$

(v) $R_{32}(-4)$, $R_{42}(-10)$

(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & -1 & -1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 7 & 6 & 10 & 11 \end{pmatrix}$ ಎಂಬ ಕೋಶವನ್ನು ಸಂಲಭ ರೂಪಕ್ಕೆ ತನ್ನಿ

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & -7 & -6 & -10 & -11 \\ 0 & 5 & 7 & 6 & 10 & 11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -7 & -6 & -10 & -11 \\ 0 & 5 & 7 & 6 & 10 & 11 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -\frac{7}{5} & -\frac{6}{5} & -\frac{10}{5} & -\frac{11}{5} \\ 0 & 5 & 7 & 6 & 10 & 11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

The transformations employed are:

(i) $C_{21}(-2)$, $C_{31}(-3)$, $C_{41}(-4)$, $C_{51}(-5)$, $C_{61}(-6)$

(ii) $R_{21}(-2)$

(iii) $R_2(\frac{1}{5})$

(iv) $C_{32}(-\frac{7}{5})$, $C_{42}(-\frac{6}{5})$, $C_{52}(-\frac{10}{5})$, $C_{62}(-\frac{11}{5})$

(v) $R_2(-1)$

(vi) $R_{32}(-5)$

The rank could have been obtained from the second step alone. The second and third rows are identical except for a factor -1. Therefore, all third-order determinants vanish. $\therefore$ rank$=2$.

Exercises 9·1.

Determine the ranks of the following matrices (by reducing to their normal forms).

1. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & -5 \\ 5 & -3 & -14 & 13 \end{pmatrix}$.

2. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \\ 11 & 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}$.

3. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

9·5. *Vectors.* An ordered set of n numbers $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ is said to form a vector. If $n=3$, the vector is three-dimensional, if $n=4$, it is four-dimensional, and so on.

ಉಪಯೋಗಿಸಿರುವ ರೂಪಾಂತರಗಳು :

(i) $C_{21}(-2), C_{31}(-3), C_{41}(-4), C_{51}(-5), C_{61}(-6)$

(ii) $R_{21}(-2)$

(iii) $R_2(\frac{1}{5})$

(iv) $C_{32}(-\frac{7}{5}), C_{42}(\frac{6}{5}), C_{52}(-\frac{10}{5}), C_{62}(-\frac{11}{5})$

(v) $R_2(-1)$ (vi) $R_{32}(-5)$.

ದರ್ಜೆಯನ್ನು ಎರಡನೆಯ ಹಂತದಲ್ಲೇ ಪಡೆಯಬಹುದು. —1 ಅಪವರ್ತನದ ಹೊರತು, ಎರಡನೆಯ ಮೂರನೆಯ ಅಡ್ಡ ಸಾಲುಗಳು ಒಂದೇ ಆಗಿವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಮೂರನೇ ಪರಿಮಾಣದ ನಿರ್ಧಾರಕಗಳೆಲ್ಲಾ ಸೊನ್ನೆಯಾಗುತ್ತವೆ $\therefore$ ದರ್ಜೆ$=2$.

ಅಭ್ಯಾಸ 9.1

ಕೆಳಗಿನ ಕೋಶಗಳ ದರ್ಜೆಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಿರಿ (ಸುಲಭ ರೂಪಕ್ಕೆ ತರುವುದರ ಮೂಲಕ)

1. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & -5 \\ 5 & -3 & -14 & 13 \end{vmatrix}$ 2. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \\ 11 & 2 & 3 & 7 \end{vmatrix}$

3. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ 4. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

9.5. ಸದಿಶಗಳು ಕ್ರಮಯುಂತವಾಗಿ ಬರೆದ $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ ಎಂಬ n ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಒಂದು ಸದಿಶವನ್ನುಂಟುಮಾಡುತ್ತವೆ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. $n=3$ ಆದರೆ, ತ್ರಿ ಪ್ರಮಾಣದ (ಆಕಾಶದ) ಸದಿಶ, $n=4$ ಆದರೆ ನಾಲ್ಕುಪ್ರಮಾಣದ ಸದಿಶ, ಇತ್ಯಾದಿ.

We define that two vectors $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ and $(b_1, b_2, \cdots, b_n)$ are equal if $a_1 = b_1, a_2 = b_2 \cdots, a_n = b_n$.

The vector $(0, 0, \cdots, 0)$ is called the null vector. We denote it briefly by O.

Vectors are usually denoted by Greek letters α, β etc.

If $\alpha = (a_1, \cdots, a_n)$ and $\beta = (b_1, \cdots, b_n)$ are two vectors, and if λ, μ are any numbers, the vector $\lambda\alpha + \mu\beta$ is defined by $(\lambda a_1 + \mu b_1, \lambda a_2 + \mu b_2, \cdots, \lambda a_n + \mu b_n)$. Similarly if

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= a_{11}, \quad a_{12}, \quad \cdots, \quad a_{1n} \\ \alpha_2 &= a_{21}, \quad a_{22}, \quad \cdots, \quad a_{2n} \\ \cdots & \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ \alpha_r &= a_{r1}, \quad a_{r2}, \quad \cdots, \quad a_{rn}. \end{aligned}$$

are r vectors, the vector $\lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \cdots + \lambda_r \alpha_r$ is given by the ordered set of numbers
$(\lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{21} + \cdots + \lambda_r a_{r1}, \cdots, \lambda_1 a_{1n} + \lambda_2 a_{2n} + \cdots + \lambda_r a_{rn})$

Definition. *The vectors $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ are said to be linearly dependent if for suitably chosen constants $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$, not all zero the vector $\lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \cdots + \lambda_r \alpha_r$ is a null vector.*

If $\lambda_1 \alpha_1 + \cdots + \lambda_r \alpha_r \neq 0$, unless $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \cdots, \lambda_r = 0$, the vectors $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ are said to be *linearly independent*.

9 6. *The necessary and sufficient conditions that r vectors $(r \leqslant n)$ should be linearly dependent.*

(A) $r = n$. Let the n vectors
$\alpha_r \equiv (a_{r1}, a_{r2}, \cdots, a_{rn}), r = 1, 2, \cdots, n$ be linearly dependent.

ಎರಡು ಸದಿಶಗಳು $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ಮತ್ತು $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ ಒಂದೇ ಆಗಿರಲು, $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \ldots, a_n = b_n$ ಎಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸುತ್ತೇವೆ. $(0, 0, \ldots, 0)$ ಎಂಬಸದಿಶವನ್ನು ಶೂನ್ಯಸದಿಶವೆನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಸಂಕ್ಷೇಪವಾಗಿ ಇದನ್ನು O ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಸದಿಶಗಳನ್ನು α, β ಮುಂತಾದ ಗ್ರೀಕ್ ಅಕ್ಷರಗಳಿಂದ ಗುರ್ತಿಸುತ್ತೇವೆ.

$\alpha = (a_1, \ldots, a_n)$, ಮತ್ತು $\beta = (b_1, \ldots, b_n)$ ಎರಡುಸದಿಶಗಳಾಗಿದ್ದು, λ, μ ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿದ್ದರೆ,

$\lambda\alpha + \mu\beta$ ಎಂಬ ಸದಿಶವು $(\lambda a_1 + \mu b_1, \lambda a_2 + \mu b_2, \cdots, \lambda a_n + \mu b_n)$ ಎಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯಿಸುತ್ತೇವೆ. ಹೀಗೆಯೇ.

$$\alpha_1 = a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n}$$
$$\alpha_2 = a_{21}, a_{22}, \cdots, a_{2n}$$
$$\alpha_r = a_{r1}, a_{r2}, \cdots, a_{rn}$$

r ಸದಿಶಗಳಾದರೆ, $\lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \cdots + \lambda_r \alpha_r$ ಎಂಬ ಸದಿಶವು $(\lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{21} + \cdots + \lambda_r a_{r1}, \ldots, \lambda_1 a_{1n} + \lambda_2 a_{2n} + \cdots + \lambda_r a_{rn})$ ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಂದ ಯುಕ್ತವಾಗಿದೆ.

ವ್ಯಾಖ್ಯೆ. ಸೂಕ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದ $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ ಗಳಿಗೆ $\lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \cdots + \lambda_r \alpha_r$ ಶೂನ್ಯ ಸದಿಶವಾದರೆ, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ ಸದಿಶಗಳು ಸರಳ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಪಡೆದಿವೆ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \cdots, \lambda_r = 0$ ಆದ ಹೊರತು, $\lambda_1 \alpha_1 + \cdots + \lambda_r \alpha_r \neq 0$ ಆದರೆ, $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ ಸದಿಶಗಳು ಸರಳ ಸ್ವತಂತ್ರವಾಗಿ ಇವೆ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

9.6. **r ಸದಿಶಗಳು $(r \leqslant n)$ ಸರಳ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಪಡೆದಿರಲು ಸಾಕು, ಬೇಕಾದ ನಿರ್ಬಂಧಗಳು.**

(A): $r = n$. $\alpha_r \equiv (a_{r1}, a_{r2}, \cdots, a_{rn})$, $r = 1, 2, \ldots, n$ ಎಂಬ n ಸದಿಶಗಳು ಸರಳ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಪಡೆದಿರಲಿ.

$$\therefore \quad \lambda_1 \alpha_1 + \cdots + \lambda_n \alpha_n = 0.$$

$$\text{or} \qquad \begin{aligned} &\lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{21} + \cdots + \lambda_n a_{n1} = 0 \\ &\lambda_1 a_{12} + \cdots + \lambda_n a_{n2} = 0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\lambda_1 a_{1n} + \cdots + \lambda_n a_{nn} = 0. \end{aligned}$$

Eliminating the λ's, we have

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & \cdots & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & \cdots & \cdots & n_{nn} \end{vmatrix} = 0 \quad (6.12)$$

Conversely, if this determinant is zero, it is possible to obtain values for $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ so as to satisfy the above equations.

(B) $r < n$. In order that the vectors may be linearly dependent, $\lambda_1 \alpha_1 + \cdots + \lambda_r \alpha_r = 0$, for suitable $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$ (not all zero). Therefore,

$$\begin{aligned} &\lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{21} + \cdots + \lambda_r a_{r1} = 0 \\ &\lambda_1 a_{12} + \quad \cdots \quad + \cdots + \lambda_r a_{r2} = 0 \\ &\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ &\lambda_1 a_{1r} + \quad \cdots \quad + \cdots + \lambda_r a_{rr} = 0 \\ &\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ &\lambda_1 a_{1n} + \quad \cdots \quad \cdots + \lambda_r a_{rn} = 0 \end{aligned}$$

We may take any r of these equations and eliminate the λ's. Hence all determinants of order r that can be formed out of the matrix

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{r1} \\ a_{12} & \cdots & \cdots & a_{r2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1r} & \cdots & \cdots & a_{rr} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & \cdots & \cdots & a_{rn} \end{pmatrix}$$

$$\therefore \quad \lambda_1 \alpha_1 + \cdots + \lambda_n \alpha_n = O$$

ಅಥವಾ

$$\begin{aligned} \lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{21} + \cdots + \lambda_n a_{n1} &= 0 \\ \lambda_1 a_{12} + \cdots + \quad \cdots + \lambda_n a_{n2} &= 0 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots & \quad \cdots \\ \lambda_1 a_{1n} + \quad \cdots + \cdots + \lambda_n a_{nn} &= 0 \end{aligned}$$

λ ಗಳನ್ನು ವಿಸರ್ಜಿಸಿ,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & \cdots & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0. \quad (6.12)$$

ವಿಲೋಮವಾಗಿ, ಈ ನಿರ್ಧಾರಕವು ಸೊನ್ನೆಯಾದರೆ, $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ ಗಳನ್ನು ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳಿಗೆ ಹೊಂದುವಂತೆ ಪಡೆಯಲು ಸಾಧ್ಯ.

(B) $r < n$. ಸದಿಶಗಳು ಸರಳ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಪಡೆದಿರಲು, ಸೂಕ್ತ $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$ ಗಳಿಗೆ, $\lambda_1 \alpha_1 + \cdots + \lambda_r \alpha_r = 0$ ಆಗಬೇಕು. ಆದ್ದರಿಂದ

$$\begin{aligned} \lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{21} + \cdots + \lambda_r a_{r1} &= 0 \\ \lambda_1 a_{12} + \cdots \quad \cdots \quad \cdots + \lambda_r a_{r2} &= 0 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots & \quad \cdots \\ \lambda_1 a_{1r} + \quad \cdots \quad \cdots + \lambda_r a_{rr} &= 0 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots & \quad \cdots \\ \lambda_1 a_{1n} + \quad \cdots \quad \cdots + \lambda_r a_{rn} &= 0 \end{aligned}$$

ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ r ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು, λ ಗಳನ್ನು ವಿಸರ್ಜಿಸ ಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{r1} \\ a_{12} & \cdots & \cdots & a_{r2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1r} & \cdots & \cdots & a_{rr} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & \cdots & \cdots & a_{rn} \end{pmatrix}$$

are equal to zero. Hence the rank of this matrix is $< r$. Since a matrix and its transpose have the same rank, all determinants of order r formed from the matrix

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & \cdots & \cdots & a_{rn} \end{pmatrix}$$

are equal to zero.

Conversely, if the rank of this matrix $< r$, it is possible to determine $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ (not all zero) such that $\lambda_1 \alpha_1 + \cdots + \lambda_r \alpha_r = 0$.

The proofs of the converse theorems will not be discussed in this book.

9·7. A new definition is now available for the rank of a matrix.

The rank of a matrix is the number of its independent rows (or columns).

The rank of a matrix is often easily determined by using this property. By way of illustration, let us find the rank of the matrix in 9·1, Ex. (2).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & -2 & 1 & 4 \\ -1 & -3 & 1 & -11 & -5 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \neq 0, \text{ but } \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

So, the rank of the matrix could possibly be 2. Let us search for a linear relation between the three rows.

ಎಂಬ ಕೋಶದಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲಾ r ಪರಿಮಾಣದ ನಿರ್ಧಾರಕಗಳ ಬೆಲೆಯೂ ಸೊನ್ನೆಯಾಗ ಬೇಕು. ಆದ್ದರಿಂದ, ಈ ಕೋಶದ ದರ್ಜೆ $< r$.

ಕೋಶದ ಆದಲಿಗೆ ಅದೇ ದರ್ಜೆಯಿರುವುದರಿಂದ,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & \cdots & \cdots & a_{rn} \end{pmatrix}$$

ಕೋಶದಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲಾ r ಪರಿಣಾಮದ ನಿರ್ಧಾರಕಗಳ ಬೆಲೆಯೂ ಸೊನ್ನೆ.

ವಿಲೋಮವಾಗಿ, ಈ ಕೋಶದ ದರ್ಜೆ $<r$ ಆಗಿದ್ದರೆ, $\lambda_1 \alpha_1 + \cdots + \lambda_r \alpha_r = 0$ ಆಗುವಂತೆ, $\lambda_1, \ldots \lambda_r$ (ಎಲ್ಲವೂ ಸೊನ್ನೆಯಲ್ಲ) ಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಲು ಸಾಧ್ಯ. ವಿಲೋಮ ಪ್ರಮೇಯಗಳ ಸಾಧನೆಯನ್ನು ಈ ಗ್ರಂಥದಲ್ಲಿ ಕೊಡುತ್ತಿಲ್ಲ.

9.7. ಕೋಶದ ದರ್ಜೆಗೆ ಈಗ ಬೇರೊಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ.

ಕೋಶದಲ್ಲಿ ಸರಳ ಸ್ವತಂತ್ರವಾಗಿರುವ ಸಾಲುಗಳ (ಅಡ್ಡ ಅಥವಾ ನೀಟು) ಸಂಖ್ಯೆಯೇ ಕೋಶದ ದರ್ಜೆ.

ಈ ಗುಣದಿಂದ ಕೋಶದ ದರ್ಜೆಯನ್ನು ಅನೇಕ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಸುಲಭವಾಗಿ ಪಡೆಯಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಯಾಗಿ, ಈ ವಿಧಾನದಿಂದ 9.1 (2) ನೆಯ ಉದಾ ಹರಣೆಯಲ್ಲಿರುವ ಕೋಶದ ದರ್ಜೆಯನ್ನು ಪಡೆಯುವ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & -2 & 1 & 4 \\ -1 & -3 & 1 & -11 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \neq 0, \text{ ಆದರೆ } \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$\therefore$ ಕೋಶದ ದರ್ಜೆ 2 ಇರಬಹುದೆಂಬ ಸೂಚನೆ ಬರುತ್ತದೆ. ಮೂರು ಅಡ ಸಾಲುಗಳ ನಡುವೆ ಸರಳ ಸಂಬಂಧಕ್ಕಾಗಿ ಹುಡುಕೋಣ.

The equations $\left.\begin{aligned}\lambda\cdot 1 + \mu\cdot 2 &= -1\\ \lambda\cdot 2 + \mu\cdot 3 &= -3\end{aligned}\right\}$

are satisfied by $\lambda = -3$, $\mu = 1$. For these values,

$$\lambda\cdot -1 + \mu\cdot -2 = 1$$
$$\lambda\cdot 4 + \mu\cdot 1 = -11$$
$$\lambda\cdot 3 + \mu\cdot 4 = -5$$

are also true. Hence
-3 (first row) $+ 1\cdot$(second row) $=$ third row

$\therefore$ The rank of the matrix is 2.

The same property holds for columns also. Thus

$$-10\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}+7\begin{pmatrix}2\\3\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\1\\-11\end{pmatrix};\ -\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}2\\3\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\4\\-5\end{pmatrix}$$

Exercises 9·2.

Find by the above method the ranks of the matrices in art. 9·4 and in Exercises 9·1.

9·8. *Linear equations.* An equation of the type

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = b$$

is called a linear equation. Let us now consider the m simultaneous equations

$$\begin{aligned}a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1n} x_n &= b_1\\ a_{21} x_1 + \cdots + \cdots + a_{2n} x_n &= b_2\\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad &\cdots\\ a_{m1} x_1 + \cdots + \cdots + a_{mn} x_n &= b_m.\end{aligned}$$

These are m simultaneous equations in the n unknowns $x_1, x_2, \cdots, x_n$. m may be any integer. We may have $m > n$, or $m = n$, or $m < n$.

$$\left.\begin{array}{l}\lambda.1 + \mu.2 = -1 \\ \lambda.2 + \mu.3 = -3\end{array}\right\}$$ ಎಂಬ ಸಮಿಾಕರಣಗಳಿಗೆ, $\lambda = -3, \mu = 1$

ಮಂಾಲಗಳು. ಈ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ

$$\begin{array}{l}\lambda.-1 + \mu.-2 = 1 \\ \lambda.\ \ 4 + \mu.\ \ 1 = -11 \\ \lambda.\ \ 3 + \mu.\ \ 4 = -5\end{array}$$

ಇವು ಮಂಾರೂ ನಿಜ. ಎಂದರೆ

-3 (ಮೊದಲನೆಯ ಅಡ್ಡಸಾಲಂ) $+ 1.$ (ಎರಡನೆಯ ಅಡ್ಡಸಾಲು) $=$ ಮಂಾರನೆಯ ಅಡ್ಡಸಾಲು.

$\therefore$ ಕೋಶದ ದರ್ಜೆ 2

ಇದೇ ಗುಣವು ನೀಟುಸಾಲುಗಳಿಗೂ ಇರುತ್ತದೆ. ಉದಾ :

$$-10\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}+7\begin{pmatrix}2\\3\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\1\\-11\end{pmatrix};-\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}2\\3\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\4\\-5\end{pmatrix}$$

ಅಭ್ಯಾಸ 9.2.

§ 9.4 ನಲ್ಲಿರುವ ಉದಾಹರಣೆಗಳ ಮತ್ತು ಅಭ್ಯಾಸ 9.1 ರಲ್ಲಿರುವ ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿರುವ ಕೋಶಗಳ ದರ್ಜೆಗಳನ್ನು ಮೇಲಿನ ವಿಧಾನದಿಂದ ಪಡೆಯಿರಿ.

9 8. ಸರಳ ಸಮೀಕರಣಗಳು.

$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = b$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಸರಳ ಸಮೀಕರಣವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇಂಥ m ಸಮಕಾಲಿಕ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬರೆಯೋಣ.

$$\begin{array}{l}a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1n} x_n = b_1 \\ a_{22} x_1 + \cdots \cdots \cdots\cdots \cdots\cdots + a_{2n} x_n = b_2 \\ \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \\ a_{m1} x_1 + \cdots\cdots \cdots\cdots \cdots\cdots \cdots\cdots + a_{mn} x_n = b_m\end{array}$$

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ ಅವ್ಯಕ್ತಗಳಲ್ಲಿ ಇವು m ಸಮಕಾಲಿಕಸಮೀಕರಣಗಳು, m ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರಬಹುದು, $m > n$ ಅಥವಾ $m = n$, ಅಥವಾ $m < n$ ಆಗಿರಬಹುದು.

Writing

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot\cdot & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

the above equations can be briefly written as $AX=B$. This single matrix equation is equivalent to the above m equations. A is called the *coefficient matrix* of the given equations, and the matrix

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

is called the *augmented matrix*. The augmented matrix will be written (A, B).

When $b_1, b_2, \cdots, b_m$ are all zero, the equations are said to be *homogeneous*. Otherwise, they are *non-homogeneous*.

It is important to know when $x_1, \ldots, x_n$ can be determined so as to satisfy all these equations, and in that case to find their values. We shall discuss here only the case $n=4$, but the principle is the same for any value of n.

9·9. *Non-homogeneous linear equations.* We shall first consider the four equations

$$\left.\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + a_{14} x_4 = b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 + a_{24} x_4 = b_2 \\ a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 + a_{34} x_4 = b_3 \\ a_{41} x_1 + a_{42} x_2 + a_{43} x_3 + a_{44} x_4 = b_4 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

where b_1, b_2, b_3, b_4 are not all zero.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

ಆದರೆ ಮೇಲಣ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು $AX=B$ ಎಂದು ಸಂಕ್ಷೇಪವಾಗಿ ಬರೆಯ ಬಹುದು. ಈ ಒಂದು ಕೋಶ ಸಮೀಕರಣವು ಮೇಲಣ m ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಕೊಡುತ್ತದೆ. Aನ್ನು ದತ್ತಸಮೀಕರಣಗಳ **ಗುಣಕಕೋಶ** ಎಂದೂ

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & a_m \end{pmatrix}$$

ಕೋಶವನ್ನು ವರ್ಧಿತ ಕೋಶ ಎಂದೂ ಕರೆಯುವೆವು. ವರ್ಧಿತ ಕೋಶವನ್ನು (A, B) ಎಂದು ಬರೆಯುವೆವು.

$b_1, b_2, \ldots, b_m$ ಎಲ್ಲವೂ ಸೊನ್ನೆಯಾದಾಗ, ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಸಮ ಪ್ರಮಾಣದವು ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಹಾಗಿಲ್ಲದಿದ್ದರೆ, ಅವು ಅಸಮಪ್ರಮಾಣದವು.

ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳೆಲ್ಲವನ್ನೂ ಸರಿದೂಗಿಸುವಂತೆ $x_1, \ldots x_n$ಗಳಿಗೆ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಲು ಯಾವಾಗ ಸಾಧ್ಯ, ಆ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುವುದು ಹೇಗೆ ಎಂಬ ವಿಚಾರವು ಬಹು ಮುಖ್ಯವಾದುದು. $n=4$ ಎಂಬ ಸಂದರ್ಭವನ್ನು ಮಾತ್ರ ಇಲ್ಲಿ ಚರ್ಚಿಸು ವೆವು. nನ ಇತರ ಬೆಲೆಗಳಿಗೂ ಇದೇ ತತ್ವವನ್ನೇ ಪ್ರತಿಪಾದಿಸಬಹುದು.

9. 9. ಅಸಮಪ್ರಮಾಣದ ಸರಳ ಸಮೀಕರಣಗಳು

ಮೊದಲು,

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+a_{14}x_4&=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+a_{24}x_4&=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3+a_{34}x_4&=b_3 \\ a_{41}x_1+a_{42}x_2+a_{43}x_3+a_{44}x_4&=b_4 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

ಎಂಬ ನಾಲ್ಕು ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಇಲ್ಲಿ b_1, b_2, b_3, b_4 ಎಲ್ಲವೂ ಸೊನ್ನೆಯಲ್ಲ.

$$A = (a_{ij}), \qquad (A, B) = (a_{ij}, b).$$

(i) When $| a_{ij} | \neq 0$, i.e. when the rank of the matrix A is 4, the method of finding the values of the x's has been explained in 6·13.

$$x_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{24} \\ b_3 & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_4 & a_{42} & \cdots & a_{44} \end{vmatrix} \div | A |$$

etc.

Hence the equations have one and only one set of solutions. Also, rank A = rank $(A, B) = 4$

(ii) Let $| A | = 0$. Therefore rank $A \leqslant 3$.

Let rank $A = 3$. By the second definition of rank, A has only three independent rows. Suppose they are the first three rows. Hence the fourth row can be connected with them linearly. This means that there exist numbers λ_1, λ_2, λ_3 such that

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{21} + \lambda_3 a_{31} &= a_{41} \\ \lambda_1 a_{12} + \lambda_2 a_{22} + \lambda_3 a_{32} &= a_{42} \\ \lambda_1 a_{13} + \lambda_2 a_{23} + \lambda_3 a_{33} &= a_{43} \\ \lambda_1 a_{14} + \lambda_2 a_{24} + \lambda_3 a_{34} &= a_{44} \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Hence, if the equations (1) possess solutions x_1, x_2, x_3, x_4, multiplying the first three equations by λ_1, λ_2, λ_3 respectively, we obtain by (2),

$$\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3 = b_4.$$

Hence the augmented matrix (A, B) also has only three independent rows. There exists a linear relation between the four rows.

ಇಲ್ಲಿ $A=(a_{ij})$, $(A, B)=(a_{ij}, b)$

(i) $|a_{ij}| \neq 0$ ಆದಾಗ, ಎಂದರೆ A ಕೋಶದ ದರ್ಜೆ 4 ಆದಾಗ, xಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುವ ವಿಧಾನವನ್ನು 6.13ರಲ್ಲಿ ವಿವರಿಸಿದೆ.

$$x_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{24} \\ b_3 & \dots & \dots & \dots \\ b_4 & a_{42} & \dots & a_{44} \end{vmatrix} \div |A|$$

ಇತ್ಯಾದಿ

ಆದ್ದರಿಂದ, ಸಮೀಕರಣಗಳಿಗೆ ಒಂದೇ ಒಂದು ಮೂಲಗಣ ಇರುತ್ತದೆ. ಮತ್ತು Aಯ ದರ್ಜೆ$=(A, B)$ ಯ ದರ್ಜೆ$=4$.

(ii) ಈಗ $|A|=0$ ಆಗಿರಲಿ. ಆದ್ದರಿಂದ Aಯ ದರ್ಜೆ ≤ 3.

Aಯ ದರ್ಜೆ 3 ಇರಲಿ. ದರ್ಜೆಯ ಎರಡನೆಯ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯ ಪ್ರಕಾರ .... ಕೋಶದಲ್ಲಿ ಮೂರು ಸಾಲುಗಳು (ಅಡ್ಡ ಸಾಲುಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ) ಮಾತ್ರ ಸರಳ ಸ್ವತಂತ್ರವಾಗಿವೆ. ಮೊದಲನೆಯ ಮೂರು ಸಾಲುಗಳು ಎನ್ನೋಣ. ಆದ್ದರಿಂದ ನಾಲ್ಕನೆಯ ಅಡ್ಡಸಾಲನ್ನು ಅವುಗಳೊಡನೆ ಸಂಬಂಧಿಸಬಹುದು.

ಎಂದರೆ,
$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{21} + \lambda_3 a_{31} &= a_{41} \\ \lambda_1 a_{12} + \lambda_2 a_{22} + \lambda_3 a_{32} &= a_{42} \\ \lambda_1 a_{13} + \lambda_2 a_{23} + \lambda_3 a_{33} &= a_{43} \\ \lambda_1 a_{14} + \lambda_2 a_{24} + \lambda_3 a_{34} &= a_{44} \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

ಆಗುವಂತೆ, λ_1, λ_2, λ_3 ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿರುತ್ತವೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, (1) ಸಮೀಕರಣಗಳಿಗೆ x_1, x_2, x_3, x_4 ಮೂಲಗಳಿದ್ದರೆ, ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಮೊದಲನೆಯ ಮೂರು ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ λ_1, λ_2, λ_3 ಗಳಿಂದ ಗುಣಿಸಿ ಕೂಡಿ. (2) ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವುದರಿಂದ,

$$\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3 = b_4$$

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ; ಆದ್ದರಿಂದ (A, B) ಕೋಶದಲ್ಲಿಯೂ ಮೂರು ಸಾಲುಗಳು ಮಾತ್ರ ಸರಳ ಸ್ವತಂತ್ರ; ನಾಲ್ಕು ಸಾಲುಗಳ ನಡುವೆ ಸರಳ ಸಂಬಂಧವಿದೆ.

$\therefore$ rank $(A, B) = 3 =$ rank A.

Conversely, let rank $A =$ rank $(A, B) = 3$. Only three of the given equations are linearly independent, say the first three. Hence at least one determinant of the third order formed out of

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

does not vanish. Let $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0.$

Now, by the method of 6·13, the equations

$$\left.\begin{aligned} a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + a_{13}\, x_3 &= b_1 - a_{14}\, x_4 \\ a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + a_{23}\, x_3 &= b_2 - a_{24}\, x_4 \\ a_{31}\, x_1 + a_{32}\, x_2 + a_{33}\, x_3 &= b_3 - a_{34}\, x_4 \end{aligned}\right\}$$

can be solved for x_1, x_2, x_3. The solutions are obtained in the form

$$x_1 = c_1 + c_2\, x_4, \quad x_2 = d_1 + d_2\, x_4, \quad x_3 = e_1 + e_2\, x_4.$$

We can given any value k for x_4, and thus obtain one set of solutions.

$$x_1 = c_1 + kc_2,\ x_2 = d_1 + kd_2,\ x_3 = e_1 + ke_2,\ x_4 = k.$$

The given equations thus possess an infinite number of solutions.)

(iii) rank $A=2$. A has now only two independent rows (say the first two). The third and fourth rows can be connected with these linearly. Hence

$\therefore$ (A, B) ಕೋಶದ ದರ್ಜೆ $= 3 =$ Aಯ ದರ್ಜೆ

ವಿಲೋಮವಾಗಿ, Aಯ ದರ್ಜೆ = (A, B) ಯ ದರ್ಜೆ = 3 ಆಗಿರಲಿ. ದತ್ತಸಮೀಕರಣಗಳಲ್ಲಿ ಮೂರು ಮಾತ್ರ ಸರಳ ಸ್ವತಂತ್ರತೆ ಪಡೆದಿವೆ. ಮೊದಲನೆಯ ಮೂರು ಎನ್ನೋಣ.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}$$

ನಲ್ಲಿ ಸೊನ್ನೆಯಲ್ಲದ ಮೂರನೆಯ ಪರಿಮಾಣದ ಒಂದಾದರೂ ನಿರ್ಧಾರಕವು ಇದೆ.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0 \text{ ಆಗಿರಲಿ.}$$

ಈಗ,
$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 - a_{14}x_4 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 - a_{24}x_4 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 - a_{34}x_4 \end{aligned}\right\}$$

ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು x_1, x_2, x_3 ಗಳಿಗಾಗಿ 6.13 ರ ವಿಧಾನದಿಂದ ಬಿಡಿಸಬಹುದು

$x_1 = c_1 + c_2 x_4$, $x_2 = d_1 + d_2 x_4$, $x_3 = e_1 + e_2 x_4$ ಎಂಬ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಮೂಲಗಳು ದೊರೆಯುತ್ತವೆ. ಇಲ್ಲಿ x_4ಗೆ ಯಾವುದೇ ಬೆಲೆ k ಕೊಟ್ಟರೆ, ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣಗಳಿಗೆ ಮೂಲಗಳ ಒಂದು ಗಣ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ :

$x_1 = c_1 + kc_2$, $x_2 = d_1 + kd_2$, $x_3 = e_1 + ke_2$, $x_4 = k$. ಆದ್ದರಿಂದ, ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣಗಳಿಗೆ ಅನಂತ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು.

(iii) Aಯ ದರ್ಜೆ 2. ಈಗ Aಯಲ್ಲಿ ಎರಡು ಅಡ್ಡ ಸಾಲುಗಳು ಮಾತ್ರ (ಮೊದಲನೆಯ ಎರಡು ಎನ್ನಿ) ಸರಳ ಸ್ವತಂತ್ರವಾಗಿವೆ. ಮೂರನೆಯ ನಾಲ್ಕನೆಯ ಅಡ್ಡ ಸಾಲುಗಳನ್ನು ಇವುಗಳೊಡನೆ ಸಂಬಂಧಿಸಬಹುದು. ಎಂದರೆ

$$\left.\begin{array}{l}\lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{21} = a_{31} \\ \lambda_1 a_{12} + \lambda_2 a_{22} = a_{32} \\ \lambda_1 a_{13} + \lambda_2 a_{23} = a_{33} \\ \lambda_1 a_{14} + \lambda_2 a_{24} = a_{34}\end{array}\right| \quad \begin{array}{l}\lambda_1' a_{11} + \lambda_2' a_{21} = a_{41} \\ \text{and so on.}\end{array}$$

If the equations (1) admit of solutions x_1, x_2, x_3, x_4, we obtain by the same procedure as in (ii) above, that

$$\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 = b_3 \quad \text{and} \quad \lambda_1' b_1 + \lambda_2' b_2 = b_4.$$

Hence the augmented matrix (A, B) too has only two independent rows.

$$\therefore \text{ rank } (A, B) = 2 = \text{rank } A.$$

Conversely, let rank $A = \text{rank } (A, B) = 2$. Out of the given equations, only two are linearly independent, say the first two.

$$\text{Let} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

The equations $a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + (a_{13} x_3 + a_{14} x_4 - b_1) = 0$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + (a_{23} x_3 + a_{24} x_4 - b_2) = 0$$

can be solved for x_1, x_2. The solutions take the form

$$x_1 = \alpha x_3 + \beta x_4 + \gamma, \quad x_2 = \alpha' x_3 + \beta' x_4 + \gamma'.$$

x_3 and x_4 can take any values. The given equations possess a two-fold infinity of solutions.

(iv) Rank $A = 1$. Only one row in A is independent. The other rows are merely multiples of this row. The equations will be consistent only if the matrix (A, B) too has this property.

$$\therefore \quad \text{rank } A = \text{rank } (A, B) = 1.$$

When this holds, x_2, x_3, x_4 may be assigned any values, and x_1 obtained.

$$\lambda_1 a_{11} + \lambda_1 a_{21} = a_{31}$$
$$\lambda_1 a_{12} + \lambda_2 a_{22} = a_{32}$$
$$\lambda_1 a_{13} + \lambda_2 a_{23} = a_{33}$$
$$\lambda_1 a_{14} + \lambda_2 a_{24} = a_{34}$$

$$\lambda_1' a_{11} + \lambda_2' a_{21} = a_{41}$$
ಇತ್ಯಾದಿ

(1) ಸಮೀಕರಣಗಳಿಗೆ x_1, x_2, x_3, x_4 ಮೂಲಗಳಿದ್ದರೆ, (ii) ರಲ್ಲಿ ಮಾಡಿದಂತೆಯೇ ಮಾಡಿದರೆ,

$$\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 = b_3 \text{ ಮತ್ತು } \lambda_1' b_1 + \lambda_2' b_2 = b_4$$

ಆದ್ದರಿಂದ (A, B) ಕೋಶದಲ್ಲಿಯೂ ಎರಡು ಸಾಲುಗಳು ಮಾತ್ರ ಸ್ವತಂತ್ರ.

$\therefore$ (A, B) ಕೋಶದ ದರ್ಜೆ $= 2 =$ Aಯ ದರ್ಜೆ,

ವಿಲೋಮವಾಗಿ, Aಯ ದರ್ಜೆ $=$ (A, B) ಯ ದರ್ಜೆ $= 2$ ಆಗಿರಲಿ. ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣಗಳಲ್ಲಿ ಎರಡು ಮಾತ್ರ ಸರಳ ಸ್ವತಂತ್ರತೆ ಪಡೆದಿವೆ, ಮೊದಲನೆಯ ಎರಡು ಎನ್ನೋಣ.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0 \text{ ಆಗಿರಲಿ,}$$

ಈಗ $a_{11} x_1 + a_{22} x_2 + (a_{13} x_3 + a_{14} x_4 - b_1) = 0$

$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + (a_{23} x_3 + a_{24} x_4 - b_2) = 0$

ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು x_1, x_2 ಗಳಿಗಾಗಿ ಬಿಡಿಸಬಹುದು ಮೂಲಗಳು

$$x_1 = \alpha x_3 + \beta x_4 + \gamma, \; x_2 = \alpha' x_3 + \beta' x_4 + \gamma'$$

ಎಂಬ ರೂಪವನ್ನು ತಾಳುತ್ತವೆ. x_3, x_4 ಗೆ ಯಾವುದೇ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕೊಡಬಹುದು. ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣಗಳಿಗೆ ದ್ವಿಗುಣ ಅನಂತ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಮೂಲಗಳಿರುತ್ತವೆ.

(iv) Aಯ ದರ್ಜೆ 1. A ಯಲ್ಲಿ ಒಂದೇ ಸಾಲು ಸ್ವತಂತ್ರ. ಮಿಕ್ಕ ಸಾಲುಗಳು ಈ ಸಾಲುಗಳ ಗುಣಕಗಳು. (A, B) ಗೂ ಇದೇ ಗುಣವಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ, ಸಮೀಕರಣಗಳು ಸಮಂಜಸವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

$\therefore$ Aಯ ದರ್ಜೆ $=$ (A, B)ಯ ದರ್ಜೆ $= 1$.

ಈ ಗುಣವಿದ್ದಾಗ, x_2, x_3, x_4 ಗಳಿಗೆ ಯಾವುದೇ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟು x_1 ಪಡೆಯಬಹುದು.

Let there now be more than four equations. Let there be five equations :

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{14}x_4 &= b_1 \\ \cdots\cdots&\cdots\cdots \\ a_{41}x_1 + \cdots + a_{44}x_4 &= b_4 \\ a_{51}x_1 + \cdots + a_{54}x_4 &= b_5 \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

$$\text{If } |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{14} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{41} & \cdots & a_{44} \end{vmatrix} \neq 0, \text{ rank } A=4.$$

Then, by 6·13, we can solve for the λ's so as to satisfy

$$\begin{aligned} \lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{21} + \lambda_3 a_{31} + \lambda_4 a_{41} &= a_{51} \\ \lambda_1 a_{12} + \ldots + \ldots + \lambda_4 a_{42} &= a_{52} \\ \lambda_1 a_{13} + \ldots + \ldots + \lambda_4 a_{43} &= a_{53} \\ \lambda_1 a_{14} + \ldots + \ldots + \lambda_4 a_{44} &= a_{54} \end{aligned}$$

We can prove as before that if the equations (3) possess solutions,

$$\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3 + \lambda_4 b_4 = b_5.$$

Therefore, the fifth equation is linearly connected with the remaining four. The solutions obtained by solving the first four equations also satisfy the fifth.

Similarly, the cases when rank A is 3, 2, 1 can be discussed to prove that if solutions exist, rank (A, B) = rank A. When this holds, the solutions of the equations that are linearly independent satisfy the remaining equations also. Further the number of solutions is infinite.

All this discussion leads to

Theorem 2. *The necessary and sufficient condition that the non-homogeneous equations $AX=B$ should possess solutions (one or more) is that rank A=rank (A, B).*

ಇನ್ನು (1) ರಲ್ಲಿ ನಾಲ್ಕಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಸಮೀಕರಣಗಳಿರಲಿ.

$$\left.\begin{aligned} a_{11} x_1 + \dots + a_{14} x_4 &= b_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{41} x_1 + \dots + a_{44} x_4 &= b_4 \\ a_{51} x_1 + \dots + a_{54} x_5 &= b_5 \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

ಎಂಬ ಐದು ಸಮೀಕರಣಗಳಿರಲಿ.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{14} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{41} & \dots & a_{44} \end{vmatrix} \neq 0 \text{ ಆದರೆ, A ಯ ದರ್ಜೆ 4.}$$

ಈಗ

$$\begin{aligned} \lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{21} + \lambda_3 a_{31} + \lambda_4 a_{41} &= a_{51} \\ \lambda_1 a_{12} + \dots + \dots + \lambda_4 a_{42} &= a_{52} \\ \lambda_1 a_{13} + \dots + \dots + \lambda_4 a_{43} &= a_{53} \\ \lambda_1 a_{14} + \dots + \dots + \lambda_4 a_{44} &= a_{54} \end{aligned}$$

ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣಗಳಿಂದ, 6.13 ರಂತೆ λ ಗಳಿಗೆ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು. ಸಮೀಕರಣ (3) ಗಳಿಗೆ ಮೂಲಗಳಿದ್ದರೆ, $\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3 + \lambda_4 b_4 = b_5$ ಎಂದು ತೋರಿಸಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ ಐದನೇ ಸಮೀಕರಣವು ಉಳಿದ ನಾಲ್ಕರೊಡನೆ ಸರಳಸಂಬಂಧವನ್ನು ಪಡೆದಿದೆ. ಮೊದಲ ನಾಲ್ಕು ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ ಬರುವ ಮೂಲಗಳು ಐದನೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನೂ ಸರಿದೂಗಿಸುತ್ತದೆ.

ಹೀಗೆಯೇ A ಯ ದರ್ಜೆ 3, 2, 1 ಆದಾಗ, ಮೇಲೆ ಚರ್ಚಿಸಿದಂತೆಯೇ ಚರ್ಚಿಸಿ, ಮೂಲಗಳಿದ್ದರೆ (A, B)ಯ ದರ್ಜೆ = A ಯ ದರ್ಜೆಎಂದು ತಿಳಿಯಬಹುದು. ಈ ಗುಣವಿದ್ದಾಗ, ಸರಳ ಸ್ವತಂತ್ರತೆಯನ್ನು ಪಡೆದಿರುವ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಮೂಲಗಳು ಉಳಿದುವನ್ನೂ ಸರಿದೂಗಿಸುತ್ತದೆ. ಮೂಲಗಳು ಅಸಂಖ್ಯಾತವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ಈ ಎಲ್ಲ ಚರ್ಚೆಯಿಂದ ತಿಳಿಯುವ ವಿಷಯ :

ಪ್ರಮೇಯ 2. AX = B ಎಂಬ ಅಸಮಪ್ರಮಾಣದ ಸರಳ ಸಮೀಕರಣಗಳಿಗೆ ಮೂಲಗಳು (ಒಂದು ಅಥವಾ ಹೆಚ್ಚಿನಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ) ಇರಬೇಕಾದರೆ, ಬೇಕಾದ ಮತ್ತು ಸಾಕಾದ ನಿರ್ಬಂಧನೆ

A ಯ ದರ್ಜೆ = (A, B)ಯ ದರ್ಜೆ.

9·10. *Homogeneous linear equations.* In the above discussion, if the b's are all zero, the equations become homogeneous.

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + a_{13}\, x_3 + a_{14}\, x_4 = 0 \\ a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + a_{23}\, x_3 + a_{24}\, x_4 = 0 \\ a_{31}\, x_1 + a_{32}\, x_2 + a_{33}\, x_3 + a_{34}\, x_4 = 0 \\ a_{41}\, x_1 + a_{42}\, x_2 + a_{43}\, x_3 + a_{44}\, x_4 = 0 \end{array}\right\} \quad (1)$$

Of course $x_1=0$, $x_2=0$, $x_3=0$, $x_4=0$ are solutions. These will be considered trivial. If non-trivial solutions exist, we have proved in 6·12 that $|\, c_{ij}\, | = 0$, i.e. the rank of the matrix $A=(a_{ij})$ should be less than 4.

Dividing the equations by X_4, and writing

$x_r/x_4 = X_r$, $r=1, 2, 3$, we have

$$a_{11}\, X_1 + a_{12}\, X_2 + a_{13}\, X_3 + a_{14} = 0$$

$$a_{21}\, X_1 + a_{22}\, X_2 + a_{23}\, X_3 + a_{24} = 0$$

$$a_{31}\, X_1 + a_{32}\, X_2 + a_{33}\, X_3 + a_{34} = 0$$

$$a_{41}\, X_1 + a_{42}\, Y_2 + a_{43}\, X_3 + a_{44} = 0$$

If rank $A=3$, one of these equations is linearly connected with the remaining three ; if rank $A=2$, only two are linearly independent ; if rank$=1$, only one independent equation exists. When the rank is 3, X_1, X_2, X_3 have a single set of solutions. Hence, the ratios $X_1 : X_2 : X_3 : X_4$ can be determined uniquely. When the rank is 2 or 1, these ratios can be found in an infinite number of ways. Hence we have.

Theorem 3. *The necessary and sufficient condition that 4 homogeneous linear equations in 4 unknowns should possess non-trivial solutions is that the coefficients-matrix should be of rank less than 4,*

A similar result holds for n homogeneous equations in n unknowns.

9.10 ಸಮಪ್ರಮಾಣದ ಸರಳ ಸಮೀಕರಣಗಳು. ಮೇಲಿನ ವಿವರಣೆಯಲ್ಲಿ, b ಗಳು ಸೊನ್ನೆಯಾದರೆ, ಸಮೀಕರಣಗಳು ಸಮ ಪ್ರಮಾಣದವುಗಳಾಗುತ್ತವೆ.

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}\ x_1 + a_{12}\ x_2 + a_{13}\ x_3 + a_{14}\ x_4 = 0 \\ a_{21}\ x_1 + a_{22}\ x_2 + a_{23}\ x_3 + a_{24}\ x_4 = 0 \\ a_{31}\ x_1 + a_{32}\ x_2 + a_{33}\ x_3 + a_{34}\ x_4 = 0 \\ a_{41}\ x_1 + a_{42}\ x_2 + a_{43}\ x_3 + a_{44}\ x_4 = 0 \end{array}\right\} (1)$$

ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳಿಗೆ $x_1=0$, $x_2=0$, $x_3=0$, $x_4=0$ ಎಂಬ ಮೂಲ ಗಣವಿದ್ದೇ ಇರುತ್ತದೆ. ಇದು ಕ್ಷುಲ್ಲಕವೂ ಅನುಪಯುಕ್ತವೂ ಆದುದು. ಕ್ಷುಲ್ಲಕವಲ್ಲದ ಮೂಲಗಳಿರಬೇಕಾದರೆ, $|\ a_{ij}\ | = 0$ ಎಂದು 6.12 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಎಂದರೆ, $A = (\ a_{ij})$ ಕೋಶದದರ್ಜೆ 4 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಮೆ ಇರಬೇಕು.

ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು x_4 ಇಂದಭಾಗಿಸಿ, $x_r/x_4 = X_r, r = 1, 2, 3$ ಎಂದು ಬರೆದು

$$\begin{array}{l} a_{11}\ X_1 + a_{12}\ X_2 + a_{13}\ X_3 + a_{14} = 0 \\ a_{21}\ X_1 + a_{22}\ X_2 + a_{23}\ X_3 + a_{24} = 0 \\ a_{31}\ X_1 + a_{32}\ X_2 + a_{33}\ X_3 + a_{34} = 0 \\ a_{41}\ X_1 + a_{42}\ X_2 + a_{43}\ X_3 + a_{44} = 0. \end{array}$$

Aಯ ದರ್ಜೆ 3 ಇದ್ದರೆ, ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಉಳಿದ ಮೂರರೊಡನೆ ಸರಳ ಸಂಬಂಧ ಪಡೆದಿದೆ, ದರ್ಜೆ 2 ಇದ್ದರೆ ಎರಡು ಮಾತ್ರ ಸರಳ ಸ್ವತಂತ್ರವಾಗಿವೆ, ದರ್ಜೆ 1 ಇದ್ದರೆ, ಸ್ವತಂತ್ರವಾದ ಒಂದು ಸಮೀಕರಣ ಮಾತ್ರ ಇದೆ. ದರ್ಜೆ 3 ಇದ್ದರೆ X_1, X_2, X_3ಗಳಿಗೆ ಒಂದು ಮೂಲಗಣಮಾತ್ರ ಇದೆ. ಎಂದರೆ $x_1 : x_2 : x_3 : x_4$ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಗಳನ್ನು ಖಚಿತವಾಗಿ ಪಡೆಯಬಹುದು. ದರ್ಜೆ 2 ಅಥವಾ 1 ಇದ್ದರೆ, ಈ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಗಳನ್ನು ಅನಂತ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಪಡೆಯಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ

ಪ್ರಮೇಯ 3. **ಅವ್ಯಕ್ತಗಳುಳ್ಳ 4 ಸಮಪ್ರಮಾಣದ ಸರಳ ಸಮೀಕರಣಗಳಿಗೆ ಕ್ಷುಲ್ಲಕವಲ್ಲದ ಮೂಲಗಳಿರಲು, ಸಾಕಾದ ಮತ್ತು ಬೇಕಾದ ನಿರ್ಬಂಧ ಗುಣಕಕೋಶದ ದರ್ಜೆ 4 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಮೆ ಇರಬೇಕು.** ಹೀಗೆಯೇ n ಅವ್ಯಕ್ತಗಳುಳ್ಳ n ಸಮೀಕರಣಗಳಿಗೆ.

Exercises 9·3

1. $x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$
$2x_1 + x_2 + x_3 = 0$
$3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0$

2. Solve $x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0$
$x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0$
$2x_1 - 4x_2 + x_3 = 0$

have no non-trivial solutions.

Obtain the solutions, if they exist, for the following equations :—

3. $2x + 5y + 6z = 0$
$x - 3y - 8z = 0$
$3x + y - 4z = 0$

4. $4x - y + 6z = 0$
$2x + 7y + 12z = 0$
$x - 4y - 3z = 0$
$5x - 5y + 3z = 0$

5. $2x + 3y - z - t = 0$
$4x + z - 6t = 0$
$3x + y + 3z - 2t = 0$
$6x + 2y - 11t = 0$

6. $9x - 15y - 3z = 13$
$3x + 10y + 2z = 5$
$2x - 5y - z = 4$

7. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$
$x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2$
$x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 3$
$x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 4$

8. $x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + 2 = 0$
$x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - 1 = 0$
$3x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 + 4 = 0$

9. $x + 2y - z = 3$
$3x - y + 2z = 1$
$6x - y + 4z = 6$
$x - y + z + 1 = 0$

10. $2x - 3y + 4z + 3 = 0$
$3x - 2y + z + 1 = 0$
$x + 6y - 13z - 9 = 0$

ಅಭ್ಯಾಸ 9.3

1. $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$ ಸಮೀಕರಣಗಳಿಗೆ (ಕ್ಷುಲ್ಲಕವಲ್ಲದ) ಪರಿಹಾರಗಳಿಲ್ಲ.

2. $$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 0 \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 &= 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$ ಇವುಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ.

ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳಿಗೆ ಪರಿಹಾರಗಳಿದ್ದರೆ ಪಡೆಯಿರಿ :

3. $$\begin{aligned} 2x+5y+6z&=0 \\ x-3y-8z&-0 \\ 3x+y-4z&=0 \end{aligned}$$

4. $$\begin{aligned} 4x - y + 6z &= 0 \\ 2x + 7y + 12z &= 0 \\ x - 4y - 3z &= 0 \\ 5x - 5y + 3z &= 0 \end{aligned}$$

5. $$\begin{aligned} 2x+3y- z- t&=0 \\ 4x+ z - 6t&=0 \\ 3x+ y+3z-2t&=0 \\ 6x+ 2y - 11t&=0 \end{aligned}$$

6. $$\begin{aligned} 9x-15y-3z&=13 \\ 3x+10y+2z&= 5 \\ 2x- 5y- z&= 4. \end{aligned}$$

7. $$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3+x_4&=1 \\ x_1+x_2+x_3-x_4&=2 \\ x^1+x_2-x_3-x_4&=3 \\ x_1-x_2-x_3-x_4&= 4 \end{aligned}$$

8. $$\begin{aligned} x_1-x_2+x_3+ x_4+2&=0 \\ x_1+x_2-x_3+2x_4-1&=0 \\ 3x_1-x_2+x_3+4x_4+4&=0 \end{aligned}$$

9. $$\begin{aligned} x+2y- z&=3 \\ 3x- y+2z&=1 \\ 6x- y+4z&=6 \\ x- y+ z+1&=0 \end{aligned}$$

10. $$\begin{aligned} 2x-3y+ 4z+3&=0 \\ 3x-2y+ z+1&=0 \\ x+6y-13z-9&=0 \end{aligned}$$

11.
$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 5 \\ 2x + 3y - z &= 4 \\ 3x + y + 2z &= 6 \\ x - y + 6z &= 8 \end{aligned}$$

12.
$$\begin{aligned} x - 2y + z - t + 1 &= 0 \\ 3x - 2z + 3t + 4 &= 0 \\ 5x - 4y + t + 3 &= 0 \end{aligned}$$

13.
$$\begin{aligned} 2x + y + t + w &= 6 \\ x - y - t + 2w &= 8 \end{aligned}$$

14. For what values of λ, will the following not possess unique solutions?

$$\begin{aligned} \lambda x + y + z &= 1 \\ x + \lambda y + z &= 1 \\ x + y + \lambda z &= -2 \end{aligned}$$

Do solutions exist for these values of λ ?

15. For what values of k and l, will the equations

$$\begin{aligned} 2x + 3y - z &= 5 \\ 3x + 4y + 2z &= 10 \\ 3x + 5y + kz &= l \end{aligned}$$

(i) have no solutions

(ii) have unique solutions

(iii) have an infinite number of solutions ?

16. For what values of k and l, are the following equations solvable? Determine the solutions.

$$\begin{aligned} x + y + z + w &= 0 \\ 2x - y - z + w &= 1 \\ 3x + 2y + 2z - w &= 4 \\ 4x + 3y - z + 2w &= 10 \\ 4x - 5y + kz - 7w &= l. \end{aligned}$$

---

11. $$\begin{aligned} x+2y+z&=5\\ 2x+3y-z&=4\\ 3x+y+2z&=6\\ x-y+6z&=8 \end{aligned}$$

12. $$\begin{aligned} x-2y+z-t+1&=0\\ 3x-2z+3t+4&=0\\ 5x-4y+t+3&=0 \end{aligned}$$

13. $$\begin{aligned} 2x+y+t+w&=6\\ x-y-t+2w&=8 \end{aligned}$$

14. $$\begin{aligned} \lambda x+y+z&=1\\ x+\lambda y+z&=1\\ x+y+\lambda z&=-2 \end{aligned}$$

λನ ಯಾವ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ, ಇವಕ್ಕೆ ಏಕಮಾತ್ರ ಮೂಲಗಳಿರುವುದಿಲ್ಲ ? ಆ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ, ಮೂಲಗಳಿರುವುವೇ ?

15. $$\begin{aligned} 2x+3y-z&=5\\ 3x+4y+2z&=10\\ 3x+5y+kz&=l \end{aligned}$$

k, l ಗಳ ಯಾವ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ, ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳಿಗೆ

(i) ಮೂಲಗಳಿಲ್ಲ (ii) ಏಕಮಾತ್ರ ಮೂಲಗಳಿವೆ (iii) ಅನಂತ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಮೂಲಗಳಿವೆ ?

16. $$\begin{aligned} x+y+z+w&=0\\ 2x-y-z+w&=1\\ 3x+2y+2z-w&=4\\ 4x+3y-z+2w&=10\\ 4x-5y+kz-7w&=l \end{aligned}$$

k, l ಗಳ ಯಾವ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳಿಗೆ ಮೂಲಗಳಿರುವುವು ? ಮೂಲಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಿರಿ.

CHAPTER 10

Theory of Equations (1)

10·1. We shall write the equation of the n^{th} degree in the form

$$f(x) \equiv a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_n = 0. \qquad (1)$$

The coefficients $a_0, a_1, \cdots, a_n$ will be assumed to belong either to the field of real numbers or to the field of complex numbers. We have stated in Chapter 4 that this equation always admits of n roots belonging to the field of complex numbers. Let the roots be called $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$. Sometimes the roots may be all real, sometimes two or more roots may be equal, i.e. $\alpha_1 = \alpha_2$, or $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$, and so on.

By the Remainder Theorem, $x - \alpha_1, x - \alpha_2, \cdots, x - \alpha_n$ are all factors of $f(x)$. Hence,

$$f(x) \equiv a_0 (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_n).$$

Expanding,

$$f(x) = a_0 [x^n - \Sigma \alpha_1 x^{n-1} + \Sigma \alpha_1 \alpha_2 x^{n-2} - \Sigma \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 x^{n-3} + \cdots + (-1)^n \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n] \qquad (2)$$

Here, $\Sigma \alpha_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$.

$\Sigma \alpha_1 \alpha_2$ is the sum of terms obtained by multiplying

$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ two at a time. In other words

$\Sigma \alpha_1 \alpha_2 = \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_3 + \alpha_2 \alpha_3 + \alpha_2 \alpha_5 + \cdots$

Similarly the sum of terms obtained by multiplying $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ three at a time is written $\Sigma \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$, and so on.

ಅಧ್ಯಾಯ 10

ಸಮೀಕರಣ ಸಿದ್ಧಾಂತ (1)

10.1. n ಪ್ರಮಾಣದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು

$$f(x) \equiv a_o x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_n = 0 \qquad (1)$$

ಎಂದು ಬರೆಯುವೆವು. ಗುಣಕಗಳಾದ $a_o, a_1, \cdots a_n$ ವಾಸ್ತವಸಂಖ್ಯಾ ಕ್ಷೇತ್ರದಿಂದಲಾಗಲಿ ಮಿಶ್ರಸಂಖ್ಯಾಕ್ಷೇತ್ರದಿಂದಲಾಗಲಿ ಆರಿಸಲ್ಪಟ್ಟವು ಎಂದು ಭಾವಿಸುವೆವು. ಈ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಮಿಶ್ರಸಂಖ್ಯಾ ಕ್ಷೇತ್ರಕ್ಕೆ ಸೇರುವ n ಮೂಲಗಳು ಇದ್ದೇ ಇರುವುವು ಎಂದು ಅಧ್ಯಾಯ 4 ರಲ್ಲಿ ತಿಳಿಸಿರುವೆವು. ಮೂಲಗಳನ್ನು $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ ಎಂದು ಬರೆಯೋಣ. ಒಂದೊಂದು ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಮೂಲಗಳು ಎಲ್ಲವೂ ವಾಸ್ತವಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರಬಹುದು, ಒಂದೊಂದು ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಎರಡು ಅಥವಾ ಹೆಚ್ಚು ಮೂಲಗಳು ಒಂದೇ ಆಗಿರಬಹುದು, ಎಂದರೆ $\alpha_1 = \alpha_2$, ಅಥವಾ $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$, ಇತ್ಯಾದಿ.

ಶೇಷ ಪ್ರಮೇಯದಿಂದ $x - \alpha_1, x - \alpha_2, \cdots, x - \alpha_n$ ಎಲ್ಲವೂ $f(x)$ಗೆ ಅಪವರ್ತನಗಳು. ಆದ್ದರಿಂದ

$$f(x) \equiv a_o (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_n)$$

ಇದನ್ನು ವಿಸ್ತರಿಸಿದರೆ,

$$f(x) = a_o[x^n - \Sigma\alpha_1 x^{n-1} + \Sigma\alpha_1\alpha_2 x^{n-2} - \Sigma\alpha_1\alpha_2\alpha_3 x^{n-3} + \cdots + (-1)^n \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n] \qquad (2)$$

ಇಲ್ಲಿ, $\Sigma \alpha_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$

$\Sigma\alpha_1\alpha_2$ ಎಂಬುದು $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ ಎರಡೆರಡನ್ನಾಗಿ ಆರಿಸಿ ಗುಣಿಸಿ, ಹೀಗೆ ಬಂದ ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ. ಎಂದರೆ $\Sigma\alpha_1\alpha_2 = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_2\alpha_5 + \cdots$

ಹೀಗೆಯೇ $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ ಗಳಲ್ಲಿ ಮೂರನ್ನು ಆರಿಸಿ ಅವನ್ನು ಗುಣಿಸಿ ಬರುವ ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು $\Sigma\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇತ್ಯಾದಿ.

By equating the coefficients of like powers of x in (1) and (2),

$$a_0 = a_0$$
$$-a_0 \Sigma \alpha_1 = a_1$$
$$a_0 \Sigma\alpha_1 \alpha_2 = a_2$$
$$-a_0 \Sigma\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 = a_3$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots$$
$$(-)^n a_0 \cdot \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n = a_n.$$

Hence,

$$\Sigma \alpha_1 = -a_1/a_0$$
$$\Sigma \alpha_1 \alpha_2 = a_2/a_0$$
$$\Sigma \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 = -a_3/a_0$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots$$
$$\Sigma \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n = (-1)^n a_n/a_0$$

These relations between the roots and the coefficients of the equation (1) are of fundamental importance. They point out two facts:

I. Without actually solving the equation, we can at once write down the sum of the roots, the sum of the products of the roots taken two at a time, the sum of the products of the roots three at a time, and so on.

II. When the coefficients $a_0, a_1, \cdots a_n$ are all real, the roots may be, some or all, complex numbers. But $\Sigma\alpha_1$, $\Sigma\alpha_1 \alpha_2$ etc. are all real.

One may perhaps expect that these relations may be useful to solve the equation. But except in some easy cases, these equations will be of no help in solving the equation.

10·2 *Examples*:

(1) Let α, β, γ be the roots of the equation

$$2x^3 - 3x^2 + 4x + 5 = 0.$$

$$\therefore \alpha + \beta + \gamma = \tfrac{3}{2}, \quad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \tfrac{4}{2}, \quad \alpha\beta\gamma = -\tfrac{5}{2}.$$

(2) Let α, β, γ, δ be the roots of the equation

$$3x^4 + 5x^2 + 6x + 4 = 0.$$

ಈಗ (1) ಮತ್ತು (2) ರಲ್ಲಿ ಸಮಘಾತದ ಗುಣಕಗಳನ್ನು ಸಮೀಕರಿಸಿದರೆ,

$$a_0 = a_0$$
$$-a_0\Sigma\alpha_1 = a_1$$
$$a_0\Sigma\alpha_1\alpha_2 = a_2$$
$$-a_0\Sigma\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = a_3$$
$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots$$
$$(-1)^n a_0\,\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n = a_n$$

ಆದ್ದರಿಂದ.

$$\Sigma\alpha_1 = -a_1/a_0$$
$$\Sigma\alpha_1\alpha_2 = a_2/a_0$$
$$\Sigma\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = -a_3/a_0$$
$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots$$
$$\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n = (-1)^n a_n/a_0.$$

ಸಮೀಕರಣ (1)ರ ಮೂಲಗಳಿಗೂ ಗುಣಕಗಳಿಗೂ ಇರುವ ಈ ಸಂಬಂಧಗಳು ಬಹು ಮುಖ್ಯವಾದುವು. ಈ ಸಂಬಂಧಗಳು ಎರಡು ವಿಷಯಗಳನ್ನು ಎತ್ತಿಹೇಳುತ್ತವೆ.

I. ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸದೆಯೇ, ಅದರ ಮೂಲಗಳ ಮೊತ್ತ, ಮೂಲಗಳ ಎರಡೆರಡರ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳ ಮೊತ್ತ, ಮೂರು ಮೂರರ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳ ಮೊತ್ತ, ಮುಂತಾದುವನ್ನು ಒಡನೆಯೇ ಹೇಳಬಹುದು.

II. ಗುಣಕಗಳಾದ $a_0, a_1, \ldots, a_n$ ಎಲ್ಲವೂ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿದ್ದರೆ, ಮೂಲಗಳು ಕೆಲವು ಅಥವಾ ಎಲ್ಲವೂ ಮಿಶ್ರಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರಬಹುದು. ಆದರೆ $\Sigma\alpha_1$, $\Sigma\alpha_1\alpha_2$ ಮುಂತಾದುವು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು.

ಈ ಸಂಬಂಧಗಳು ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸುವುದಕ್ಕೆ ಸಹಾಯಕಗಳಾಗಿರಬಹುದೆಂಬ ಆಶೆಯು ತಲೆದೋರಬಹುದು. ಆದರೆ ಕೆಲವು ಸುಲಭಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ವಿನಾ, ಈ ಸಂಬಂಧಗಳು ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸಲು ಸಹಾಯಕಗಳಾಗುವುದಿಲ್ಲ.

10. 2. ಉದಾಹರಣೆಗಳು.

(1) $2x^3-3x^2+4x+5=0$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು α, β, γ ಆಗಿರಲಿ.

$$\therefore \quad \alpha+\beta+\gamma=3/2,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=4/2,\ \alpha\beta\gamma=-5/2.$$

(2) $3x^4+5x^2+6x+4=0$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ಆಗಿರಲಿ.

$\therefore \alpha + \beta + \gamma + \delta = 0$ (There is no term in x^3, or the coefficient of x^3 is zero)

$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\delta + \beta\delta + \gamma\delta = \frac{5}{3}$

$\alpha\beta\gamma + \beta\gamma\delta + \alpha\gamma\delta + \alpha\beta\delta = \frac{-6}{3} = -2, \quad \alpha\beta\gamma\delta = \frac{4}{3}.$

(3) The roots of the equation $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ are α, β, γ. What are the values of (i) $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ (ii) $\alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2$?

(i) $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2\Sigma\,\alpha\beta = (-p)^2 - 2q = p^2 - 2q$

(ii) $\Sigma\alpha^2\beta^2 = (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)^2 - 2\,\alpha\beta\gamma\,(\alpha + \beta + \gamma) = q^2 - 2(-r)(-p)$
$= q^2 - 2rp.$

(4) The equation $x^3 + x^2 - 17x + 15 = 0$ has two roots differing by 2. Solve the equation.

Let the roots be $\alpha, \alpha + 2, \gamma$.

$\therefore \alpha + (\alpha + 2) + \gamma = -1$; $\alpha(\alpha + 2) + \alpha\gamma + (\alpha + 2)\gamma = -17$;

$\alpha(\alpha + 2)\gamma = -15.$

From the first two, $\gamma = -(2\alpha + 3)$

$\therefore \alpha(\alpha + 2) - 2(\alpha + 1)(2\alpha + 3) = -17$

$\therefore 3\alpha^2 + 8\alpha - 11 = 0 \qquad \therefore \alpha = 1$ or $\alpha = -\frac{11}{3}$.

If $\alpha = 1$, $\gamma = -5$. These values satisfy the equation

$\alpha(\alpha + 2)\gamma = -15.$

If $\alpha = -\frac{11}{3}$, then $\gamma = \frac{13}{3}$. The third equation is not satisfied Hence $\alpha = 1$. The required roots are 1, 3, -5.

(5) Solve the equation $x^3 + 9x^2 + 23x + 15 = 0$, given that its roots are in arithmetic progression.

Let the roots be $\alpha - \delta, \alpha, \alpha + \delta$

$\therefore (\alpha - \delta) + \alpha + (\alpha + \delta) = -9 \qquad \therefore \alpha = -3.$

$(\alpha - \delta)\alpha + (\alpha - \delta)(\alpha + \delta) + \alpha(\alpha + \delta) = 23.$

or $3\alpha^2 - \delta^2 = 23.$

$\therefore \quad \alpha+\beta+\gamma+\delta=0.$ (x^3ನಲ್ಲಿ ಪದವಿಲ್ಲ, ಅಥವಾ x^3ನ ಗುಣಕ 0.)

$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\delta+\beta\delta+\gamma\delta=5/3$

$\alpha\beta\gamma+\beta\gamma\delta+\alpha\gamma\delta+\alpha\beta\delta=-6/3=-2$

$\alpha\beta\gamma\delta=4/3.$

(3) $x^3+px^2+qx+r=0$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು α,β,γ.

(i) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$ (ii) $\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2$ ಇವುಗಳ ಬೆಲೆಗಳೇನು ?

(i) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\Sigma\alpha\beta)=(-p)^2-2(q)$
$=p^2-2q$

(ii) $\Sigma\alpha^2\beta^2=(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2-2\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)=q^2$
$-2(-r)(-p)=q^2-2rp.$

(4) $x^3+x^2-17x+15=0$ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ, ಎರಡು ಮೂಲಗಳ ಅಂತರ 2. ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ.

ಮೂಲಗಳು α, $\alpha+2$, γ ಆಗಿರಲಿ,

$\therefore \alpha+(\alpha+2)+\gamma=-1$; $\alpha(\alpha+2)+\alpha\gamma+(\alpha+2)\gamma=-17$; $\alpha(\alpha+2)\gamma=-15.$

ಮೊದಲ ಎರಡರಿಂದ, $\gamma=-(2\alpha+3)$

$\therefore \alpha(\alpha+2)-2(\alpha+1)(2\alpha+3)=-17$

$\therefore 3\alpha^2+8\alpha-11=0 \quad \therefore \alpha=1$ ಅಥವಾ $\alpha=-11/3$.

$\alpha=1$ ಆದರೆ, $\gamma=-5$, ಈ ಬೆಲೆಗಳು ಮೂರನೆಯ ಸಮೀಕರಣವಾದ $\alpha(\alpha+2)\gamma=-15$ ಎಂಬುದನ್ನು ಸರಿದೂಗಿಸುತ್ತವೆ.

$\alpha=-11/3$ ಆದರೆ, $\gamma=\frac{13}{3}$. ಮೂರನೆಯ ಸಮೀಕರಣ ಸರಿಹೋಗುವುದಿಲ್ಲ.

ಆದ್ದರಿಂದ $\alpha=1$. ಬೇಕಾದ ಮೂಲಗಳು 1, 3, -5.

(5) $x^3+9x^2+23x+15=0$ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿವೆ. ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ.

ಮೂಲಗಳು $\alpha-\delta, \alpha, \alpha+\delta$ ಆಗಿರಲಿ.

$\therefore (\alpha-\delta)+\alpha+(\alpha+\delta)=-9 \quad \therefore \alpha=-3.$

$(\alpha-\delta)\alpha+(\alpha-\delta)(\alpha+\delta)+\alpha(\alpha+\delta)=23.$

ಅಥವಾ $3\alpha^2-\delta^2=23$

Since $\alpha = -3$, $\delta^2 = 27-23 = 4$ $\quad \therefore \delta = \pm 2$.

It is enough to take one of the values for δ, say $\delta = 2$. Therefore the roots are $-3-2$, -3, $-3+2$ i.e. $-5, -3, -1$. If we take $\delta = -2$, we get the same roots in the reverse order.

[We have not used the third relation $(\alpha-\delta)\,\alpha\,(\alpha+\delta) = -15$ at all. On account of the given property, this relation is automatically satisfied by the values of α and δ found from the first two relations.]

(6) What relation should exist between p, q, r in order that the roots of the equation $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ be in A.P.?

Using the notation of the previous problem,

$$3\alpha = -p, \quad 3\alpha^2 - \delta^2 = q, \quad \alpha(\alpha^2 - \delta^2) = -r.$$

Eliminate α and δ. $\alpha = -p/_3$, $\delta^2 = p^2/_3 - q$

$\frac{p}{3}\left\{ \frac{p^2}{9} - \left(\frac{p^2}{3} - q\right) \right\} = r$ is the required relation.

Exercises 10·1.

1. If the roots of $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ are α, β, γ find the values of :—

   (i) $\Sigma \alpha^2 \beta$ (ii) $\Sigma \alpha^2 \beta\gamma$ (iii) $\Sigma \frac{1}{\alpha^2}$ (iv) $\Sigma \alpha^3$.

   [Hint: $(\alpha+\beta+\gamma)\ (\alpha^2+\beta^2+\gamma^2) = \Sigma\alpha^3 + \Sigma\alpha^2\beta$]

   (v) $(\beta+\gamma-2\alpha)\,(\gamma+\alpha-2\beta)\,(\alpha+\beta-2\gamma)$

   [Hint: $\beta+\gamma-2\alpha = (\beta+\gamma+\alpha) - 3\alpha = -p-3\alpha$ $\quad \therefore$ etc.]

2. If the roots of $x^4+6x^3+6x+1=0$ are $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, find the value of $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2$.

3. The roots of the equation $x^5 + 5x - 2 = 0$ are x_1, x_2, x_3, x_4, x_5. Prove that $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2=0$.

4. Two roots of the equation $2x^3-5x^2-4x+12=0$ are equal. Solve the equation.

$\alpha = -3$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, $\delta^2 = 27 - 23 = 4 \quad \therefore \delta = \pm 2$.

ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ಸಾಕು, $\delta = 2$ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಮೂಲಗಳು $-3-2, -3, -3+2$ ಅಥವಾ $-5, -3, -1$, $\delta = -2$ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ಇದೇ ಮೂಲಗಳೇ ವ್ಯತಿರಿಕ್ತ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಬರುತ್ತವೆ.

[ಮೂರನೆಯ ಸಂಬಂಧವಾದ $(\alpha - \delta)\alpha(\alpha + \delta) = -15$ ಎಂಬುದನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಯೇ ಇಲ್ಲ. ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಗುಣದಿಂದ, ಈ ಸಂಬಂಧವು ತನ್ನಷ್ಟಕ್ಕೆ ತಾನೇ ಸರಿಹೋಗುವುದು.]

(6) $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿರಬೇಕಾದರೆ, p, q, r ಗಳ ನಡುವೆ ಯಾವ ಸಂಬಂಧವಿರಬೇಕು ?

ಮೇಲಿನ ಲೆಕ್ಕದ ಸಂಕೇತದಿಂದ,

$3\alpha = -p,\ 3\alpha^2 - \delta^2 = q,\ \alpha(\alpha^2 - \delta^2) = -r.$

α, δ ಗಳನ್ನು ವಿಸರ್ಜಿಸಿ. $\alpha = -p/3,\ \delta^2 = \frac{p_2}{3} - q$.

$$\therefore \frac{p}{3}\left\{\frac{p^2}{9} - \left(\frac{p^2}{3} - q\right)\right\} = r$$ ಎಂಬುದೇ ಬೇಕಾದ ಸಂಬಂಧ.

ಅಭ್ಯಾಸ 10.1

1. $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು α, β, γ ಆದರೆ ಇವುಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಿರಿ :—

   (i) $\Sigma\alpha^2\beta$ (ii) $\Sigma\alpha^2\beta\gamma$ (iii) $\Sigma\frac{1}{\alpha^2}$ (iv) $\Sigma\alpha^3$

   [ಸೂಚನೆ $(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2) = \Sigma\alpha^3 + \Sigma\alpha^2\beta$]

   (v) $(\beta+\gamma-2\alpha)(\gamma+\alpha-2\beta)(\alpha+\beta-2\gamma)$

   [$\beta+\gamma-2\alpha = (\beta+\gamma+\alpha) - 3\alpha = -p-3\alpha$, ಇತ್ಯಾದಿ]

2. $x^4 + 6x^3 + 6x + 1 = 0$ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ಆದರೆ, $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2$ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಪಡೆಯಿರಿ.

3. $x^5 + 5x - 2 = 0$ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 ಆದರೆ, $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 = 0$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

4. $2x^3 - 5x^2 - 4x + 12 = 0$ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಎರಡು ಮೂಲಗಳು ಸಮವಾಗಿವೆ. ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ.

5. Two roots of the equation $x^3-9x^2+14x+24=0$ are in the ratio 2 : 3. Solve the equation.

6. What relation should exist between p, q, r if one root of the equation $x^3+px^2+qx+r=0$ is double the other ?

7. The sum of two roots of the equation $x^4+4x^3-x^2-8x-2=0$ is zero. Solve the equation.

8. The sum of two roots of the equation $x^4-8x^3+19x^2-12x+2=0$ is equal to the sum of the other two roots. Solve the equation.

9. Solve the equation $27x^3-21x^2-7x+1=0$, given that the roots are in geometric progression.

   [Let the roots be $\alpha/r, \alpha, \alpha r$]

10. Determine the relation that should exist between a, b, c, d in order that the roots of the equation $ax^3+3bx^2+3cx+d=0$ be in G. P. ?

11. Solve the equation $x^4+2x^3-21x^2-22x+40=0$, given that the roots are in A. P.

    [Let the roots be $a-3d, a-d, a+d, a+3d$]

12. Determine the relations (two) between p, q, r, s in order that the roots of the equation $x^4+px^3+qx^2+rx+s=0$ be in A. P.

10·3. *Some easy theorems.* We have explained in Chapter 4, Theorem 6 that when the coefficients of an equation are real numbers, complex numbers occur as roots in conjugate pairs. This theorem is very important. We shall give here an easy proof.

Theorem 1. *If the coefficients $a_0, a_1, \cdots, a_n$ in the equation $f(x) \equiv a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$ are all real, and if $\alpha + i\beta$ (α, β are real) be one root, then $\alpha - i\beta$ is also a root.*

5. $x^3-9x^2+14x+24=0$ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಎರಡು ಮೂಲಗಳು. 2 : 3 ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಲ್ಲಿವೆ. ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ.

6. $x^3+px^2+qx+r=0$ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಮೂಲವು ಇನ್ನೊಂದರ ಎರಡರಷ್ಟಿರಬೇಕಾದರೆ, p, q, r ಗಳ ನಡುವೆ ಏನು ಸಂಬಂಧವಿರಬೇಕು ?

7. $x^4+4x^3-x^2-8x-2=0$ ಸಮೀಕರಣದ ಎರಡು ಮೂಲಗಳ ಮೊತ್ತ ಸೊನ್ನೆ. ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ.

8. $x4-8x^3+19x^2-12x+2=0$ ಸಮೀಕರಣದ ಎರಡು ಮೂಲಗಳ ಮೊತ್ತ ಇನ್ನೆರಡು ಮೂಲಗಳ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿದೆ. ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ.

9. $27x^3-21x^2-7x+1=0$ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿವೆ. ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ.

[ಮೂಲಗಳು α/r. α, αr ಆಗಿರಲಿ]

10. $ax^3+3bx^2+3cx+d=0$ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿರಲು, a, b, c, d ಗಳ ನಡುವೆ ಯಾವ ಸಂಬಂಧವಿರಬೇಕು ?

11. $x^4+2x^3-21x^2-22x+40=0$ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿವೆ. ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ,

[ಮೂಲಗಳು $a-3d$, $a-d$, $a+d$, $a+3d$ ಆಗಿರಲಿ.]

12. $x^4+px^3+qx^2+rx+s=0$ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿದ್ದರೆ, p, q, r, s ಗಳ ನಡುವೆ ಇರುವ ಸಂಬಂಧಗಳನ್ನು (ಎರಡು) ಪಡೆಯಿರಿ.

10.3. **ಕೆಲವು ಸುಲಭ ಪ್ರಮೇಯಗಳು.** ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿರುವ ಗುಣಕಗಳು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದರೆ, ಮಿಶ್ರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಅನುವರ್ತಿ ಜೋಡಿಗಳಲ್ಲಿ ಮೂಲಗಳಾಗಿರುವುವು ಎಂದು ಅಧ್ಯಾಯ 4 ಪ್ರಮೇಯ 6ರಲ್ಲಿ ತಿಳಿಸಲಾಗಿದೆ. ಈ ಪ್ರಮೇಯವು ಬಹು ಮುಖ್ಯವಾದದು. ಸುಲಭವಾದ ಬೇರೊಂದು ಸಾಧನೆಯನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ಕೊಡುವೆವು.

ಪ್ರಮೇಯ 1. $f(x) \equiv a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_n=0$

ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ, ಗುಣಕಗಳಾದ $a_0, a_1, \dots, a_n$ **ಎಲ್ಲವೂ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದಾಗ,** $\alpha+i\beta$ (α,β **ವಾಸ್ತವ**) **ಒಂದು ಮೂಲವಾದರೆ,** $\alpha-i\beta$ **ಸಹ ಮೂಲವಾಗಿರುತ್ತದೆ.**

Proof. Since $\alpha + i\beta$ is a root, $x-(\alpha + i\beta)$ is a factor of $f(x)$. If $\alpha - i\beta$ is to be a root, $x-(\alpha - i\beta)$ should also be a factor.

$$\therefore (x-\overline{\alpha + i\beta})(x-\overline{\alpha - i\beta}) \text{ is a factor of } f(x)$$

$$\text{i.e. } (x-\alpha)^2 + \beta^2 \text{ divides } f(x) \text{ without remainder.}$$

Let now $Q(x)$ be the quotient and $R(x)$ the remainder when $f(x)$ is divided by $(x-\alpha)^2 + \beta^2$.

Since $(x-\alpha)^2 + \beta^2$ is a function of the second degree, the degree of $R(x)$ should not exceed one.

$$\therefore \quad R(x) = Ax + B \quad (A, B \text{ are real constants}).$$

$$\therefore \quad f(x) = \{(x-\alpha)^2 + \beta^2\} Q(x) + (Ax + B)$$

Since $\alpha + i\beta$ is a root of $f(x)$, $f(\alpha + i\beta) = 0$

$$\therefore \quad 0 = \{(\alpha + i\beta - \alpha)^2 + \beta^2\} Q(\alpha + i\beta) + A(\alpha + i\beta) + B.$$

$$= 0 + (A\alpha + B) + i\,AB.$$

$$\therefore \quad A\alpha + B = 0 \quad \text{and} \quad A\beta = 0.$$

Since $\alpha + i\beta$ has been considered as a complex number,

$\beta \neq 0 \quad \therefore A = 0 \quad \therefore B = 0.$

Hence the remainder $R(x) = 0$.

$\therefore \quad x-(\alpha - i\beta)$ is also a factor of $f(x)$. This means that $\alpha - i\beta$ is a root.

The following theorem is proved by a similar method.

Theorem 2. *If the coefficients of the equation*

$$f(x) \equiv a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

are rational numbers, and if $\alpha + \sqrt{\beta}$ *(*α, β *are rational,* $\sqrt{\beta}$ *irrational) is a root,* $\alpha - \sqrt{\beta}$ *is also a root.*

The proof will be outlined:

$$(x-\overline{\alpha + \sqrt{\beta}})(x-\overline{\alpha - \sqrt{\beta}}) = (x-\alpha)^2 - \beta.$$

Let $f(x) \equiv \{(x-\alpha)^2 - \beta\} Q(x) + (Ax+B)$, A, B rational.

ಸಾಧನೆ $\alpha+i\beta$ ಮೂಲವಾದ್ದರಿಂದ $x-(\alpha+i\beta)$ ಎಂಬುದು $f(x)$ ಗೆ ಅಪವರ್ತನ. $\alpha-i\beta$ ಮೂಲವಾಗಬೇಕಾದರೆ $x-(\alpha-i\beta)$ ಅಪವರ್ತನವಾಗಬೇಕು.

$\therefore (x-\overline{\alpha+i\beta})\ (x-\overline{\alpha-i\beta})$ ಎಂಬುದು $f(x)$ ನ ಅಪವರ್ತನ ಎಂದರೆ $(x-\alpha)^2+\beta^2$ ಎಂಬುದು $f(x)$ ನ್ನು ನಿಶ್ಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗಿಸಬೇಕು;

ಈಗ $f(x)$ ನ್ನು $(x-\alpha)^2+\beta$ ಇಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಬರುವ ಭಾಗಲಬ್ಧ ವನ್ನು $Q(x)$ ಎಂದೂ ಶೇಷವನ್ನು $R(x)$ ಎಂದೂ ಕರೆಯೋಣ.

$(x-\alpha)^2+\beta^2$ ಎರಡನೆಯ ಪ್ರಮಾಣದ ಉತ್ಪನ್ನವಾದ್ದರಿಂದ, $R(x)$ ಮೊದಲ ನೆಯ ಪ್ರಮಾಣಕ್ಕಿಂತ ಮೀರಕೂಡದು;

$\therefore\ R(x)=Ax+B$, (A,B ವಾಸ್ತವ ಸ್ಥಿರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು)

$\therefore\ f(x)=\{(x-\alpha)^2+\beta^2\}\,Q(x)+(Ax+B)$

$(\alpha+i\beta)$ ಎಂಬುದು $f(x)$ ಗೆ ಮೂಲವಾದ್ದರಿಂದ, $f(\alpha+i\beta)=0$

$$\therefore\ 0=\{(\alpha+i\beta-\alpha)^2+\beta^2\}\,Q(\alpha+i\beta)+A(\alpha+i\beta)+B$$
$$=0+(A\alpha+B)+iAB$$

$\therefore\ A\alpha+B=0$ ಮತ್ತು $A\beta=0$

$\alpha+i\beta$ ಮಿಶ್ರಸಂಖ್ಯೆಯೆಂದೆಣಿಸಿರುವುದರಿಂದ, $\beta\neq0$ $\therefore A=0$ $\therefore B=0$ ಆದ್ದರಿಂದ ಶೇಷ $R(x)=0$.

$\therefore\ x-(\alpha-i\beta)$ ಎಂಬುದೂ $f(x)$ ನ ಅಪವರ್ತನ. ಅಥವಾ $\alpha-i\beta$ ಒಂದು ಮೂಲ.

ಇದೇ ವಿಧಾನವನ್ನು ಅನುಸರಿಸಿ, ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಸಾಧಿಸಬಹುದು.

ಪ್ರಮೇಯ 2. $f(x)\equiv a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0$ **ಸಮೀಕರಣದ ಗುಣಕಗಳು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿದ್ದು,** $\alpha+\sqrt{\beta}$ **(**α,β **ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು,** $\sqrt{\beta}$ **ಅಭಾಗಲಬ್ಧ) ಮೂಲವಾಗಿದ್ದರೆ,** $\alpha-\sqrt{\beta}$ **ಸಹ ಮೂಲವಾಗಿರುತ್ತದೆ.**

ಸಾಧನೆಯನ್ನು ಸಂಕ್ಷೇಪವಾಗಿ ಸೂಚಿಸುವೆವು.

$(x-\overline{\alpha+\sqrt{\beta}})\,(x-\overline{\alpha-\sqrt{\beta}})=(x-\alpha)^2-\beta$

$f(x)\equiv\{(x-\alpha)^2-\beta\}\,Q(x)+(Ax+B)$ ಆಗಿರಲಿ,

A, B ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು.

$$\therefore f(\alpha+\sqrt{\beta})=0=A(\alpha+\sqrt{\beta})+B$$

$$\therefore A\alpha+B=0, \quad A\sqrt{\beta}=0.$$

$$\sqrt{\beta}\neq 0 \qquad \therefore A=0 \qquad \therefore B=0.$$

$\therefore \overline{x-\alpha-\sqrt{\beta}}$ is also a factor of $f(x)$, or $\alpha-\sqrt{\beta}$ is a root.

Similarly,

Theorem 3. *If the coefficients of $f(x)$ are rational, and if $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$ (α, β are different rational numbers; $\sqrt{\alpha}$, $\sqrt{\beta}$ are irrational) is one root, then $\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}, -\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}, -\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}$ are all roots.*

Proof. $(x-\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})(x-\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})(x+\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})(x+\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})$

$$=x^4+\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta-2\alpha x^2-2\beta x^2.$$

When this divides $f(x)$, let the remainder be Ax^3+Bx^2+Cx+D. (A, B, C, D rational).

Now $f(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})=0 \quad \therefore A(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^3+B(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2+C(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})+D=0$. $\sqrt{\alpha}, \sqrt{\beta}, \sqrt{\alpha\beta}$ and the rational parts must be equal on both sides. Hence deduce that A, B, C, D are zero.

Corollary to Theorem 1. An equation of odd degree has at least one real root.

We assume that the coefficients of the equation are real. By Theorem 1, complex roots occur in pairs, and their total number is therefore even. Hence at least one root must be real.

Thus, for the equation of the third degree, all the three roots may be real, or else one root is real, and the other two complex. The equation of the fourth degree may have four real roots, or two or none.

Exercise 10·2.

1. If a third degree equation has two roots equal, prove that all the three roots are real.

$\therefore f(\alpha+\sqrt{\beta})=0 \qquad =A(\alpha+\sqrt{\beta})+B$

$\therefore A\alpha+B=0, \qquad A\sqrt{\beta}=0$

$\sqrt{\beta}\neq 0 \quad \therefore A=0. \quad \therefore B=0.$

$\therefore \overline{x-\alpha-\sqrt{\beta}}$ ಸಹ $f(x)$ಗೆ ಅಪವರ್ತನ, ಅಥವಾ $\alpha-\sqrt{\beta}$ ಒಂದು ಮೂಲ.

ಹೀಗೆಯೇ, ಪ್ರಮೇಯ 3. $f(x)$ನ **ಗುಣಕಗಳು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿದ್ದು, $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$ (α, β ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು, $\sqrt{\alpha}, \sqrt{\beta}$ ಅಭಾಗಲಬ್ಧ) ಒಂದು ಮೂಲವಾಗಿದ್ದರೆ, $\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}$, $-\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$ $-\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}$ ಎಲ್ಲವೂ ಮೂಲಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ.**

ಸಾಧನೆ. $(x-\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})(x-\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})(x+\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})(x+\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})$
$=x^4+\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta-2\alpha x^2-2\beta x^2$

ಇದರಿಂದ $f(x)$ನ್ನು ಭಾಗಿಸಿದಾಗ, ಶೇಷವು Ax^3+Bx^2+Cx+D ಆಗಿರಲಿ. (A, B, C, D ಭಾಗಲಬ್ಧ)

$f(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})=0. \quad \because \quad A(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^3+B(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2$ $+C(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})+D=0$ $\sqrt{\alpha}, \sqrt{\beta}, \sqrt{\alpha\beta}$ ಮತ್ತು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಎರಡು ಕಡೆಯೂ ಸಮನಾಗಿರಬೇಕು. A, B, C, D, ಸೊನ್ನೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ,

ಪ್ರಮೇಯ 1 ರ ಅನುಮಿತ. ವಿಷಮಪರಿಮಾಣದ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಒಂದಾದರೂ ವಾಸ್ತವಮೂಲವಿರಬೇಕು.

ಸಮೀಕರಣದ ಗುಣಕಗಳು ವಾಸ್ತವವೆಂದು ಭಾವಿಸುತ್ತೇವೆ. ಪ್ರಮೇಯ 1ರಂತೆ ಮಿಶ್ರಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದ ಮೂಲಗಳು ಜೋಡಿಜೋಡಿಯಾಗಿ ಬರುವುದರಿಂದ, ಅವುಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆ ಸಮಸಂಖ್ಯೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಒಂದು ಮೂಲವಾದರೂ ವಾಸ್ತವವಿರುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಮೂರನೆಯ ಪರಿಮಾಣದ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಮೂರೂ ಮೂಲಗಳು ವಾಸ್ತವವಿರಬಹುದು, ಇಲ್ಲವೇ ಒಂದು ವಾಸ್ತವಮೂಲ, ಎರಡು ಮಿಶ್ರಸಂಖ್ಯಾ ಮೂಲಗಳಿರಬಹುದು. ನಾಲ್ಕನೆಯ ಪರಿಮಾಣದ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ವಾಸ್ತವ ಮೂಲಗಳು ನಾಲ್ಕಿರಬಹುದು, ಎರಡಿರಬಹುದು, ಯಾವುದೂ ಇಲ್ಲದಿರಬಹುದು,

ಅಭ್ಯಾಸ 10.2

1. ಮೂರನೆಯ ಪರಿಮಾಣದ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಎರಡು ಮೂಲಗಳು ಸಮನಿದ್ದರೆ, ಮೂರೂ ಮೂಲಗಳು ವಾಸ್ತವ.

2. The equation $2x^3-3x^2-18x+5=0$ has one root equal to $2+\sqrt{3}$. Solve the equation.

   [Another root is $2-\sqrt{3}$. If the third root is Υ, sum of the roots $=(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})+\Upsilon=\frac{3}{2}$]

3. $2+3i$ is a root of the equation $x^3-3x^2+9x+13=0$. Solve the equation.

4. One root of the equation $x^4+5x^3+13x^2+16x+10=0$ is $-1-i$. Solve the equation

   [Another root is $-1+i$. Hence $(x+1)^2+1$ is a factor of the given function. Dividing by this, we obtain $x^2+3x+5=0$. The roots of $x^2+3x+5=0$ are the other two roots required.]

5. $5-\sqrt{2}$ is one root of the equation $x^4-6x^3-16x^2+82x+23=0$. Solve the equation.

6. One root of the equation $3x^5+2x^4-30x^3-20x^2+3x+2=0$ is $\sqrt{2}+\sqrt{3}$. Solve the equation.

7. Two of the roots of the equation $x^6+3x^5-x^4+6x^3-x^2+3x+1=0$ are $\sqrt{3}-2$ and i. Solve the equation.

10·4. Polynomials are continuous functions for all finite values of the variable x. Therefore the function $f(x)$ in the previous sections possesses the properties of continuous functions. One of the properties is the following: If $f(a)$ and $f(b)$ are of opposite signs, then $f(x)$ vanishes at least once in the interval (a, b). Thus we have

Theorem 4. *If $f(a)$ and $f(b)$ are of opposite signs, $f(x)$ has at least one root in the interval (a, b).*

This theorem can be improved. We have

Theorem 5. *If $f(a)$ and $f(b)$ are of opposite signs, the equation $f(x)=0$ has an odd number of roots in (a, b). If $f(a)$ and $f(b)$ are of the same sign, the number of roots in (a, b) is even.*

2. $2x^3-3x^2-18x+5=0$ ಸಮೀಕರಣದ ಒಂದು ಮೂಲ $2+\sqrt{3}$. ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ.

[ಇನ್ನೊಂದು ಮೂಲ $2-\sqrt{3}$, ಮೂರನೆಯ ಮೂಲ γ ಆದರೆ, ಮೂಲಗಳ ಮೊತ್ತ $=(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})+\gamma=\frac{3}{2}$.]

3. $x^3-3x^2+9x+13=0$ ಸಮೀಕರಣದ ಒಂದು ಮೂಲ $2+3i$ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ.

4. $x^4+5x^3+13x^2+16x+10=0$ ಸಮೀಕರಣದ ಒಂದು ಮೂಲ $-1-i$. ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ.

[ಇನ್ನೊಂದು ಮೂಲ $-1+i$; ಆದ್ದರಿಂದ $(x+1)^2+1$ ದತ್ತ ಉತ್ಪನ್ನಕ್ಕೆ ಅಪವರ್ತನ. ಇದರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ, x^2+3x+5 ಬರುತ್ತದೆ. $x^2+3x+5=0$ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳೇ ಇನ್ನೆರಡು ಮೂಲಗಳು.]

5. $x^4-6x^3-16x^2+82x+23=0$ ಸಮೀಕರಣದ ಒಂದು ಮೂಲ $5-\sqrt{2}$. ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ.

6. $3x^5+2x^4-30x^3-20x^2+3x+2=0$ ಸಮೀಕರಣದ ಒಂದು ಮೂಲ $\sqrt{2}+\sqrt{3}$. ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ.

7. $x^6+3x^5-x^4+6x^3-x^2+3x+1=0$ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ $\sqrt{3}-2$ ಮತ್ತು i ಎರಡು ಮೂಲಗಳು. ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ.

10.4 ಬಹುಪದಿಗಳೆಲ್ಲಾ xನ ಎಲ್ಲಾ ಪರ್ಯಾಪ್ತ ಬೆಲೆಗಳಿಗೂ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನತೆಯನ್ನು ಪಡೆದಿರುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಹಿಂದಿನ ಪ್ರಕರಣಗಳಲ್ಲಿನ $f(x)$ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನತೆಯ ಗುಣಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ. ಈ ಗುಣಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದನ್ನು ಈಗ ನಿರೂಪಿಸುವೆವು. $f(a)$, $f(b)$ ಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಧನ, ಒಂದು ಋಣವಾದರೆ (a, b) ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ $f(x)$ ಒಂದು ಸಲವಾದರೂ ಸೊನ್ನೆಯಾಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ,

ಪ್ರಮೇಯ 4. **$f(a)$, $f(b)$ಗಳ ಚಿಹ್ನೆಗಳು ಬೇರೆ ಬೇರೆಯಾಗಿದ್ದರೆ, (a, b) ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ $f(x)$ಗೆ ಒಂದಾದರೂ ಮೂಲ ವಿರಬೇಕು.**

ಈ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಉತ್ತಮಗೊಳಿಸಬಹುದು.

ಪ್ರಮೇಯ 5. **$f(a)$, $f(b)$ ಗಳ ಚಿಹ್ನೆಗಳು ಬೇರೆ ಬೇರೆಯಾಗಿದ್ದರೆ, (a, b) ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ $f(x)=0$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ವಿಷಮಸಂಖ್ಯೆಯ ಮೂಲಗಳಿರುತ್ತವೆ. $f(a)$, $f(b)$ಗಳ ಚಿಹ್ನೆಗಳು ಒಂದೇ ಆಗಿದ್ದರೆ, (a, b) ಅವಧಿಯಲ್ಲಿರುವ ಮೂಲಗಳಸಂಖ್ಯೆ ಸಮ.**

Proof. Let the roots of $f(x)=0$ in the interval (a, b) be $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$.

$$\therefore \quad f(x) = a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2) \ldots (x-\alpha_r)\,\phi(x).$$

$\phi(a)$ and $\phi(b)$ must be of the same sign. For otherwise, $\phi(x)=0$ has at least one root in (a, b). (Theorem 4). This will be a root of $f(x)=0$. But we have assumed that $\alpha_1, \cdots \alpha_r$ are all the roots of $f(x)$ in (a, b).

If a_0 is assumed to be positive,

$$f(b) = a_0(b-\alpha_1)(b-\alpha_2) \cdots (b-\alpha_r).\,\phi(b)$$

$$= \text{positive (since } b-\alpha_1 \text{ etc. are all positive)}$$

$$f(a) = a_0(a-\alpha_1)(a-\alpha_2) \cdots (a-\alpha_r).\,\phi(a)$$

Here $a-\alpha_1, a-\alpha_2, \cdots$ are all negative.

Hence the sign of $f(a)$ is that of $(-1)^r$.

$\therefore$ If $f(a)$ and $f(b)$ are of the same sign, $(-1)^r$ = positive.

$\therefore$ r is an even number.

If $f(a)$ and $f(b)$ are of opposite signs, $(-1)^r$ = negative.

$\therefore$ r is an odd number.

The truth of Theorem 5 can also be understood graphically.

Example :

$$f(x) \equiv x^3-3x+1=0.$$

We have $f(-\infty) = -\infty$, $f(0)=1$, $f(\infty)=\infty$.

Therefore, there is at least one root of $f(x)$ in the interval $(-\infty, 0)$. Let us examine other intervals.

$$f(-1) = +, \quad f(-2) = -$$

$$f(1) = -, \quad f(2) = +.$$

Hence, there is one root in the interval $(-1,-2)$, one root in $(0, 1)$, one root in $(1, 2)$. Thus all the three roots are real.

ಸಾಧನೆ. (a, b) ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ $f(x) = 0$ ಗಿರುವ ಮೂಲಗಳು α_1 $\alpha_2, \ldots, \alpha_r$ ಆಗಿರಲಿ.

$\therefore f(x) = a_0(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_r)\phi(x)$.

$\phi(a)$ ಮತ್ತು $\phi(b)$ಗಳ ಚಿಹ್ನೆ ಒಂದೇ ಆಗಿರಬೇಕು. ಇಲ್ಲದಿದ್ದರೆ, $\phi(x) = 0$ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ (a, b) ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ ಒಂದಾದರೂ ಮೂಲ ವಿರುತ್ತದೆ. (ಪ್ರಮೇಯ 4) ಇದು $f(x) = 0$ಗೂ ಮೂಲವಾಗುತ್ತದೆ. (a, b)ಯಲ್ಲಿರುವ ಮೂಲಗಳು $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ ಮಾತ್ರವಾದ್ದರಿಂದ, ಇದು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ.

a_0 ಧನವೆಂದು ಭಾವಿಸಿದರೆ,

$f(b) = a_0(b-\alpha_1)(b-\alpha_2) \ldots (b-\alpha_r) \cdot \phi(b)$ = ಧನ, ($b-\alpha_1$ ಇತ್ಯಾದಿ ಎಲ್ಲವೂ ಧನವಾದ್ದರಿಂದ)

$f(a) = a_0(a - \alpha_1)(a - \alpha_2) \ldots (a - \alpha_r)\phi(a)$.

ಇಲ್ಲಿ $a - \alpha_1$, $a - \alpha_2$, ... ಪ್ರತಿ ಒಂದೂ ಋಣ.

ಆದ್ದರಿಂದ $f(a)$ಯ ಚಿಹ್ನೆ $(-1)^r$.

$\therefore$ $f(a)$, $f(b)$ ಒಂದೇ ಚಿಹ್ನೆಯುಳ್ಳವುಗಳಾದರೆ, $(-1)^r$ = ಧನ $\therefore r$ ಸಮಸಂಖ್ಯೆ. $f(a)$, $f(b)$ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಚಿಹ್ನೆಯುಳ್ಳವುಗಳಾದರೆ, $(-1)^r$ = ಋಣ $\therefore r$ ವಿಷಮ ಸಂಖ್ಯೆ.

ಪ್ರಮೇಯ 5ರ ನಿಜತ್ವವನ್ನು ನಕ್ಷೆಯಿಂದಲೂ ಕಾಣಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆ

$$f(x) \equiv x^3 - 3x + 1 = 0$$

ಇದಕ್ಕೆ $f(-\infty) = -\infty$, $f(0) = 1$, $f(\infty) = \infty$. ಆದ್ದರಿಂದ $(-\infty, 0)$ ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ ಒಂದಾದರೂ ಮೂಲವಿರಬೇಕು. ಇತರ ಅವಧಿಗಳನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸೋಣ.

$f(-1) = +$, $f(-2) = -$

$f(1) = -$, $f(2) = +$

ಆದ್ದರಿಂದ, $(-1, -2)$ ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಮೂಲ, $(0,1)$ ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಮೂಲ, $(1,2)$ ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಮೂಲ, — ಹೀಗೆ ಮೂರೂ ಮೂಲಗಳು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು.

Exercises 10·3.

1. If $f(x)$ is a function of even degree, and a_n is negative, a_0 positive, the equation $f(x) = 0$ has at least one positive root and one negative root.

2. The roots of the equation $x^3 - 3x - 1 = 0$ are one each in the intervals $(-1, -2)$, $(0, -1)$ and $(1, 2)$.

3. Prove that the equation $x^5 - 10x^3 + 6x + 1 = 0$ has all its roots real, situated one each in the intervals $(0, 1)$, $(3, 4)$, $(-3, -4)$, while two roots lie in $(0, -1)$.
[Examine the intervals $(0, -\frac{1}{2})$, $(-\frac{1}{2}, -1)$]

10·5. *The use of the calculus.* We know from the differential calculus, that $f(x)$ is an increasing function when $f'(x)$ is positive, and decreasing when $f'(x)$ is negative. These facts may be helpful in obtaining the shape of the graph of $f(x)$, and in knowing about the roots of the equation $f(x) = 0$. This will be illustrated by the following examples :—

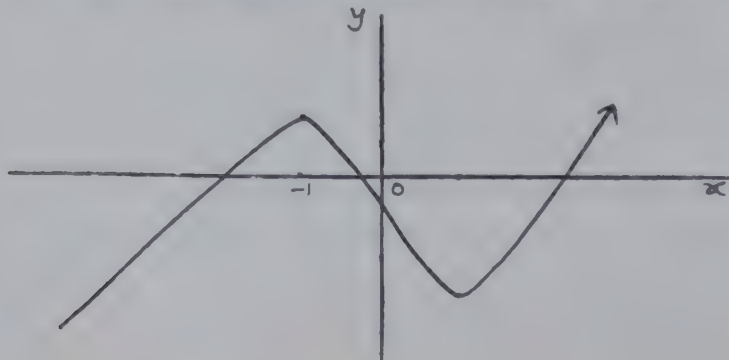
Examples.

1. $f(x) \equiv x^3 - 3x - 1 = 0$

$$f'(x) = 3(x-1)(x+1).$$

$f'(x)$ is negative in the interval $(-1, 1)$, but positive in $(-\infty, -1)$ as well as in $(1, \infty)$. Therefore $f(x)$ is increasing from $x = -\infty$ to $x = -1$, with $f(-\infty) = \infty$, $f(-1) = +1$.

Therefore the graph of $f(x)$ is rising from $x = -\infty$ until it obtains its maximum value 1 when $x = -1$. Prior to this, the graph cuts the x-axis i.e. the equation has a root in $(-\infty, -1)$.



ಅಭ್ಯಾಸ 10.3

1. $f(x)$ ಸಮಪ್ರಮಾಣದ ಉತ್ಪನ್ನವಾಗಿ, a_n, ಋಣ, a_0 ಧನ ಆಗಿದ್ದರೆ, $f(x)=0$ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಒಂದಾದರೂ ಧನಮೂಲ, ಒಂದಾದರೂ ಋಣಮೂಲ ಇರುತ್ತದೆ,

2. $x^3-3x-1=0$ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು $(-1,-2)$, $(0,-1)$, ಮತ್ತು $(1, 2)$ ಅವಧಿಗಳಲ್ಲಿವೆ.

3. $x^5-10x^3+6x+1=0$ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಎಲ್ಲ ಮೂಲಗಳು ವಾಸ್ತವವೆಂದೂ, ಅವು $(0,1)$, $(3,4)$, $(-3,-4)$ ಅವಧಿಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದೊಂದರಂತೆ ಇವೆಯೆಂದೂ, $(0,-1)$ ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ ಎರಡಿವೆಯೆಂದೂ ತೋರಿಸಿ. [$(0, -\frac{1}{2})$, $(-\frac{1}{2}, -1)$ ಅವಧಿಗಳನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ]

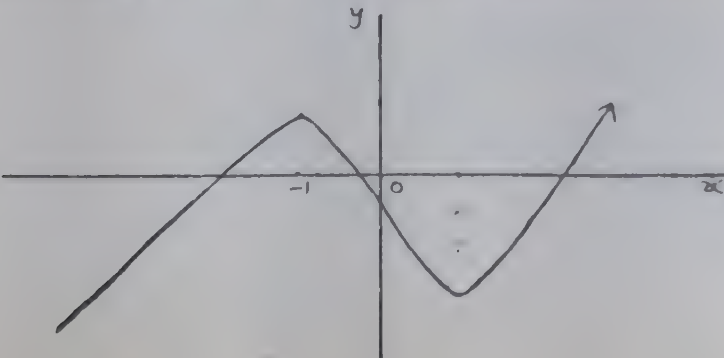
10.5 ಚಲನಕಲನದ ಉಪಯೋಗ. $f'(x)$ ಧನವಾದಾಗ, $f(x)$ ಆರೋಹಕವೆಂದೂ, $f'(x)$ ಋಣವಾದಾಗ, $f(x)$ ಅವರೋಹಕವೆಂದೂ ಕಲನ ಶಾಸ್ತ್ರದಿಂದ ತಿಳಿದಿರುವೆವು. $f'(x)=0$ ಆದಾಗ, $f(x)$ ಗರಿಷ್ಠ ಅಥವಾ ಕನಿಷ್ಠ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು. ಈ ವಿಷಯಗಳು, $f(x)$ ನ ನಕ್ಷೆಯ ರೂಪವನ್ನು ಪಡೆಯಲೂ, $f(x)=0$ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳ ಬಗ್ಗೆ ತಿಳಿಯಲೂ ಉಪಯೋಗವಾಗಬಹುದು. ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳು ಇದನ್ನು ಉದಹರಿಸುತ್ತವೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು :

1. $f(x) \equiv x^3-3x-1=0.$

$$f'(x)=3(x-1)(x+1).$$

$(-1, 1)$ ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ $f'(x)$ ಋಣ, $(-\infty, -1)$ ಅವಧಿಯಲ್ಲೂ $(1, \infty)$ ಅವಧಿಯಲ್ಲೂ ಧನ. ಆದ್ದರಿಂದ $x=-\infty$ ಇಂದ $x=-1$ ವರೆಗೆ $f(x)$ ಆರೋಹಕ, $f(-\infty)=-\infty$, $f(-1)=+1$. ಆದ್ದರಿಂದ $f(x)$ ನಕ್ಷೆಯು $-\infty$ ಇಂದ ಏರುತ್ತಾಬಂದು, $x=-1$ ಆದಾಗ $f(x)$ ಅದರ ಗರಿಷ್ಠ ಬೆಲೆ 1ನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತದೆ. ಇದಕ್ಕೆ ಮುಂಚಿತವಾಗಿ, ನಕ್ಷೆಯು x ಅಕ್ಷವನ್ನು ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ. ಎಂದರೆ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ $(-\infty, -1)$ ರಲ್ಲಿ ಒಂದು ಮೂಲವಿರುತ್ತದೆ.



Next $f(1) = -3$. The value of $f(x)$ decreases in the interval $(-1, 1)$ from 1 to -3. In between, there is one root. When $x > 1$, $f(x)$ is again increasing; the graph cuts the x-axis once again. Thus the roots of $f(x) = 0$ are all real, and we get an approximate knowledge about their position

2. $f(x) \equiv x^3 - 3x - 5 = 0$

$f'(x) = 3(x-1)(x+1)$

Here $f(-1) =$ negative. Thus, the maximum value of $f(x)$ is negative. Arguing as above, we can see that $f(x)$ has only one real root which lies in $(1, \infty)$.

3. $f(x) \equiv 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} = 0.$

$f'(x) \equiv 1 + x + \dfrac{x^2}{2!}$

$f'(x) = 0$ has no real roots. $\therefore f'(x) > 0$ for all values of x. Thus $f(x)$ is always increasing. Since its values range from $-\infty$ to $+\infty$, the graph of $f(x)$ cuts the x-axis once only. Hence $f(x) = 0$ has only one real root. Evidently this root is negative.

4. $\phi(x) \equiv 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!} = 0$

$\phi'(x) = f(x)$ of the previous problem.

Let α be the real root of $\phi'(x)$.

$\therefore$ $\phi'(x)$ is negative in $(-\infty, \alpha)$ and positive in (α, ∞).

$\therefore$ $\phi(x)$ is decreasing in $(-\infty, \alpha)$ and increasing in (α, ∞).

Now $\phi(-\infty) = +\infty$, $\phi(\alpha) = \left(1 + \alpha + \dfrac{\alpha^2}{2!} + \dfrac{\alpha^3}{3!}\right) + \dfrac{\alpha^4}{4!}$

$$= \frac{\alpha^4}{4!} = \text{positive.}$$

$f(1) = -3$ ಆದ್ದರಿಂದ$(1, 1)$ ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ $f(x)$ ನ ಬೆಲೆ 1 ರಿಂದ – 3 ವರೆಗೆ ಇಳಿಯುತ್ತದೆ. ನಡುವೆ ಒಂದು ಮೂಲವಿರುತ್ತದೆ. $x > 1$ ಆದಾಗ, $f(x)$ ಮತ್ತೆ ಆರೋಹಕವಾಗಿ, ನಕ್ಷೆಯು x–ಅಕ್ಷವನ್ನು ಮತ್ತೊಮ್ಮೆ ಸಂಧಿಸುತ್ತದೆ. ಹೀಗೆ $f(x)$ ನ ಮೂಲಗಳು ಎಲ್ಲವೂ ವಾಸ್ತವವಾಗಿ, ಅವುಗಳ ಸ್ಥಾನಗಳೂ ಸ್ಥೂಲವಾಗಿ ತಿಳಿದುಬರುತ್ತದೆ.

2. $f(x) \equiv x^3 - 3x - 5 = 0$,

$$f'(x) = 3(x-1)(x+1)$$

ಇಲ್ಲಿ $f(-1) =$ ಋಣ. ಆದ್ದರಿಂದ ಗರಿಷ್ಠ ಬೆಲೆ ಋಣ. ಮೇಲಿನಂತೆಯೇ ಚರ್ಚಿಸಿ, $f(x)$ ಗೆ ಒಂದು ಮೂಲ ಮಾತ್ರ ವಾಸ್ತವ, ಅದು $(1, \infty)$ ಯಲ್ಲಿದೆ ಎಂದು ತಿಳಿಯಬಹುದು.

3. $f(x) \equiv 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} = 0$.

$$f^1(x) \equiv 1 + x + \frac{x^2}{2!}$$

$f'(x) = 0$ ಗೆ ವಾಸ್ತವ ಮೂಲಗಳಿಲ್ಲ. $\therefore$ x ನ ಎಲ್ಲ ಬೆಲೆಗಳಿಗೂ $f'(x) > 0$. $\therefore$ $f(x)$ ಯಾವಾಗಲೂ ಆರೋಹಕ. $-\infty$ ಇಂದ $+\infty$ ವರೆಗೆ ಅದು ಪ್ರವಹಿಸುವುದರಿಂದ, $f(x)$ ನ ನಕ್ಷೆಯು ಒಂದುಸಲ ಮಾತ್ರ x–ಅಕ್ಷವನು ಸಂಧಿಸುತ್ತದೆ, ಎಂದರೆ $f(x) = 0$ ಗೆ ಒಂದು ಮೂಲ ಮಾತ್ರ ವಾಸ್ತವ. ಈ ಮೂಲವು ಋಣಸಂಖ್ಯೆ ಎಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟ.

4. $\phi(x) \equiv 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} = 0$

$\phi'(x) =$ ಮೇಲಿನ ಲೆಕ್ಕದ $f(x)$,

$\phi'(x)$ ನ ವಾಸ್ತವಮೂಲವು α ಆಗಿರಲಿ.

$\therefore$ ϕ $(-\infty, \alpha)$ ದಲ್ಲಿ $\phi'(x)$ ಋಣ, (α, ∞) ಯಂಲ್ಲಿ ಧನ.

$\therefore$ $(-\infty, \alpha)$ ದಲ್ಲಿ $\phi(x)$ ಅವರೋಹಕ, (α, ∞)ಯಂಲ್ಲಿ ಆರೋಹಕ.

$$\phi(-\infty) = +\infty, \phi(\alpha) = \left(1 + \alpha + \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^3}{3!}\right) + \frac{\alpha^4}{4!} = \frac{\alpha^4}{4!} = \text{ಧನ.}$$

The graph of $\phi(x)$ descends from $+\infty$, and attains its minimum value when $x=\alpha$. This minimum value is positive. When $x>\alpha$, the graph rises. Hence the graph does not cut the x-axis at all. All the roots of $\phi(x)=0$ are complex numbers. There is no real root.

5. Show that the roots of the equation

$$\frac{A^2}{x-a}+\frac{B^2}{x-b}+\frac{C^2}{x-c}+\cdots+\frac{K^2}{x-k}=x+l$$

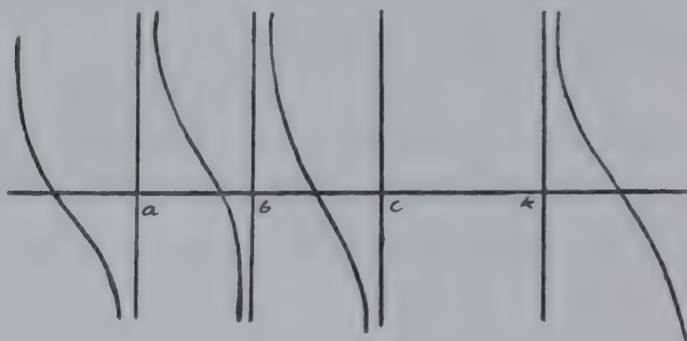
are all real. ($A, B, C, \cdots, a, b, \cdots, l$ are all real).

We can suppose that $a, b, c, \cdots, k$ are in increasing order.

If $f(x)\equiv\frac{A^2}{x-a}+\cdots-(x+l)$,

$$f'(x)=-\frac{A^2}{(x-a)^2}-\cdots-1=\text{always negative}$$

$\therefore$ $f(x)$ is always decreasing.



$\therefore$ In the interval $(a+\epsilon, b-\epsilon)$, (ϵ is any small + ve number), the value of $f(x)$ decreases from $+\infty$ to $-\infty$. Hence the graph of $f(x)$ cuts the x—axis once in the interval (a, b). Similarly, in each of the intervals (b, c), (c, d), $\cdots$, (k, ∞). Further $f(-\infty)=+\infty$, $f(a-\epsilon)=-\infty$. Hence there is one more root of $f(x)$ in $(-\infty, a)$. Thus we have proved that the roots of the equation are all real, and we also get an idea of their positions.

This problem can be worked out in another way, without using the calculus.

ϕ (x)ನ ನಕ್ಷೆಯು $+\infty$ ಇಂದ ಇಳಿಯುತ್ತಾ, $x=\alpha$ ಆದಾಗ ಅದರ ಕನಿಷ್ಠ ಬೆಲೆಯಾದ ಒಂದು ಧನಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತದೆ. $x>\alpha$ ಆದಾಗ ನಕ್ಷೆಯು ಏರುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ನಕ್ಷೆಯು x—ಅಕ್ಷವನ್ನು ಸಂಧಿಸುವುದೇ ಇಲ್ಲ, ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು ಎಲ್ಲವೂ ಮಿಶ್ರಸಂಖ್ಯೆಗಳು, ವಾಸ್ತವಮೂಲ ಯಾವುದೂ ಇಲ್ಲ.

$$5 \quad \frac{A^2}{x-a}+\frac{B^2}{x-b}+\frac{C^2}{x-c}+\dots+\frac{K^2}{x-k}=x+l$$

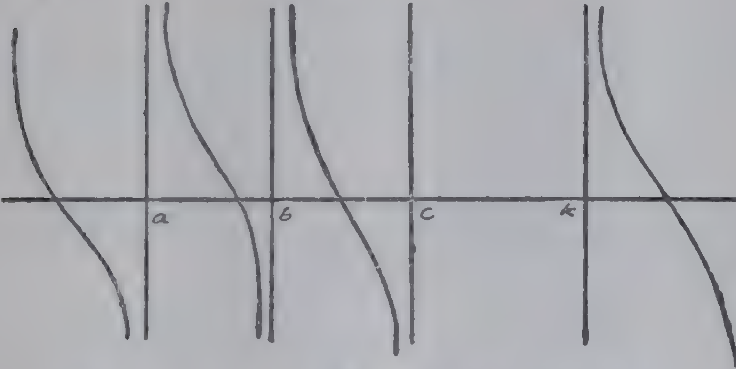
ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು ಎಲ್ಲವೂ ವಾಸ್ತವಸಂಖ್ಯೆಗಳೆಂದು ತೋರಿಸಿ. (ಇಲ್ಲಿ A, B, C, ..., a, b, ..., l ಎಲ್ಲವೂ ವಾಸ್ತವಸಂಖ್ಯೆಗಳು)

$a, b, c, \dots, k$ ಆರೋಹಕ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿವೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸಬಹುದು

$$f(x)\equiv \frac{A^2}{x-a}+\dots-(x+l) \text{ ಆದರೆ,}$$

$$f'(x)=-\frac{A^2}{(x-a)^2}-\dots-1 = \text{ ಯಾವಾಗಲೂ ಋಣ.}$$

$\therefore$ $f(x)$ ಯಾವಾಗಲೂ ಅವರೋಹಕ.



$\therefore$ $(a+\epsilon,\ b-\epsilon)$ನಲ್ಲಿ, ($\epsilon$ ಸಣ್ಣಧನಸಂಖ್ಯೆ), f(x)ನ ಬೆಲೆ, $+\infty$ ಇಂದ $-\infty$ ಗೆ ಇಳಿಯುತ್ತದೆ. f (x)ನ ನಕ್ಷೆಯು (a, b) ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ ಒಂದುಸಲ x— ಅಕ್ಷವನ್ನು ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ. ಹೀಗೆಯೇ (b, c) ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ. (c,d) ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ, ..., (k, ∞) ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ. ಇದಲ್ಲದೆ, $x(-\infty)=+\infty$ $x(a-\epsilon)=-\infty$. ಆದ್ದರಿಂದ $(-\infty, a)$ಯಲ್ಲಿ ಇನ್ನೊಂದು ಮೂಲವಿದೆ, ಹೀಗೆ ಸಮೀಕರಣದ ಎಲ್ಲ ಮೂಲಗಳೂ ವಾಸ್ತವವಿದ್ದು, ಅವುಗಳ ಸ್ಥಾನಗಳ ಸುಳಿವೂ ತಿಳಿಯುತ್ತದೆ.

ಚಲನಕಲನವನ್ನು ಪಯೋಗಿಸದೆ ಬೇರೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಇದನ್ನು ಸಾಧಿಸಬಹುದು.

If possible, let $f(x)$ have as a root the complex number $\alpha + i\beta$. Hence $\alpha - i\beta$ is also a root.

$$\therefore \Sigma \frac{A^2}{(\alpha - a) + iB} = (\alpha + l) + i\beta.$$

$$\text{and} \quad \Sigma \frac{A^2}{(\alpha - a) - i\beta} = (\alpha + l) - i\beta.$$

Subtracting,

$$-2\, i\beta\, \Sigma \frac{A^2}{(\alpha - a)^2 + \beta^2} = 2i\beta$$

$$\text{or} \quad -2\, i\beta \left[\Sigma \frac{A^2}{(\alpha - a)^2 + \beta^2} + 1 \right] = 0$$

The expression inside the bracket [ ] is positive. It cannot vanish. $\therefore \beta = 0$, i.e. no root of $f(x)$ can be a complex number.

Exercises 10·4.

1. Show that the equation $f(x) \equiv 2x^3 - 9x^2 - 24x - k = 0$ has three real roots when $k < 13$, and only one real root when $k > 13$.

2. Show that the equation $x^3 - 3x^2 + 12x + k = 0$ has only one real root, for any value of k.

3. The equation $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} = 0$ has only one real root.

4. The equation $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} = 0$ has no real roots.

10·6. *Equal Roots.* An equation may have two or more roots equal. We now study the property to be possessed by $f(x)$ in order to have equal roots.

Let two roots of $f(x)$ be equal. Call this equal root as α.

$f(x)$ಗೆ ಸಾಧ್ಯವಾದರೆ $\alpha + i\beta$ ಎಂಬ ಮಿಶ್ರಸಂಖ್ಯೆಯು ಮೂಲವಾಗಿರಲಿ. ಆದ್ದರಿಂದ $\alpha - i\beta$ ಸಹ ಮೂಲ

$$\therefore \quad \Sigma \frac{A^2}{(\alpha - a) + i\beta} = (\alpha + l) + i\beta$$

ಮತ್ತು
$$\Sigma \frac{A^2}{(\alpha - a) - i\beta} = (\alpha + l) - i\beta$$

ಕಳೆಯುವುದರಿಂದ, $-2\, i\beta . \Sigma \dfrac{A^2}{(\alpha - a)^2 + \beta^2} = 2\, i\beta$

ಅಥವಾ $-2i\beta \left[\Sigma \dfrac{A^2}{(\alpha - a)^2 + \beta^2} + 1 \right] = 0$

[ ] ಆವರಣದೊಳಗಿರುವ ಉಕ್ತಿಯು ಧನ, ಸೊನ್ನೆಯಾಗಲಾರದು.

$\therefore \quad \beta = 0$ ಎಂದರೆ $f(x)$ನ ಮೂಲವು ಮಿಶ್ರಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಲಾರದು.

ಅಭ್ಯಾಸ 10.4

1 $f(x) \equiv 2x^3 - 9x^2 - 24x - k = 0$ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ, $k < 13$ ಆದಾಗ ಮೂರು ವಾಸ್ತವ ಮೂಲಗಳಿವೆಯೆಂದೂ, $k > 13$ ಆದಾಗ ಒಂದು ವಾಸ್ತವ ಮೂಲಮಾತ್ರ ಇದೆಯೆಂದೂ ಸಾಧಿಸಿ.

2 $x^3 - 3x^2 + 12x + k = 0$ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ, kಯ ಎಲ್ಲಾ ಬೆಲೆಗಳಿಗೂ ಒಂದೇ ಒಂದು ವಾಸ್ತವ ಮೂಲವಿದೆಯೆಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

3 $1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!} + \dfrac{x^5}{5!} = 0$ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಒಂದೇ ಒಂದು ವಾಸ್ತವಮೂಲವಿದೆ.

4 $1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!} + \dfrac{x^5}{5!} + \dfrac{x^6}{6!} = 0$ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ವಾಸ್ತವ ಮೂಲಗಳಿಲ್ಲ.

10.6 **ಸಮಮೂಲಗಳು.** ಒಂದು ಸಮೀಕರಣದ ಎರಡು ಅಥವಾ ಹೆಚ್ಚು ಮೂಲಗಳು ಸಮನಾಗಿರಬಹುದು. ಇಂಥ ಪರಿಸ್ಥಿತಿ ಒದಗಲು $f(x)$ ಗೆ ಯಾವ ಗುಣ ವಿರಬೇಕು ಎಂಬುದನ್ನು ಈಗ ಅಭ್ಯಸಿಸುವೆವು.

$f(x)$ನ ಎರಡು ಮೂಲಗಳು ಸಮನಾಗಿರಲಿ. ಈ ಸಮ ಮೂಲವನ್ನು α ಎಂದು ಕರೆಯೋಣ.

$$\therefore \quad f(x)=(x-\alpha)^2\,\phi(x), \text{ where } \phi(\alpha)\neq 0.$$

$$\therefore \quad f'(x)=(x-\alpha)^2\,\phi'(x)+2(x-\alpha)\,\phi(x)$$

$$=(x-\alpha)\,\psi(x), \text{ where } \psi(x)=(x-\alpha)\,\phi'+2\phi$$

$$\therefore \quad \psi(\alpha)\neq 0.$$

Hence if α occurs twice as a root of $f(x)$, in other words if two roots of $f(x)$ are equal to α, α is a root once only for $f'(x)$.

Similarly, if $f(x)=(x-\alpha)^3\,\phi(x)$, where $\phi(\alpha)\neq 0$, i.e. if three roots of $f(x)$ are equal to α, then

$$f'(x)=(x-\alpha)^3\,\phi'(x)+3(x-\alpha)^2\,\phi(x)$$

$$=(x-\alpha)^2\,\psi(x),\ \psi(\alpha)\neq 0.$$

Hence, as above,

$$f''(x)=(x-\alpha)\,\theta(x), \quad \theta(\alpha)\neq 0.$$

Therefore, if three roots of $f(x)$ are equal, this equal root occurs twice as a root of $f'(x)$ and once as a root of $f''(x)$.

Similarly if α is an r-ple root of $f(x)$, i.e. if r roots of $f(x)$ are equal to α, α is an $(r-1)$-ple root of $f'(x)$, $(r-2)$-ple root of $f''(x)$, etc., and a simple root of $f^{(r-1)}(x)$. α will not be a root of $f^{(r)}(x)$.

Conversely, if α is a common root of $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, $\cdots$, $f^{(r-1)}(x)$, α is an r-ple root of $f(x)$, $(r-1)$-ple root of $f'(x)$, and so on.

Proof. $f(x)=f(\alpha+\overline{x-\alpha})$

$$=f(\alpha)+(x-\alpha)f'(\alpha)+\frac{(x-\alpha)^2}{2!}f''(\alpha)+\cdots+\frac{(x-\alpha)^{r-1}}{(r-1)!}f^{(r-1)}(\alpha)$$

$$+\frac{(x-\alpha)^r}{r!}f^{(r)}(\alpha)+\cdots, \text{ by Taylor's Theorem of the calculus.}$$

By hypothesis, $f(\alpha)=0$, $f'(\alpha)=0$, $\cdots$, $f^{(r-1)}(\alpha)=0$, $f^{(r)}(\alpha)\neq 0$.

$$\therefore \quad f(x)=(x-\alpha)^r\,\phi(x),\ \phi(\alpha)\neq 0.$$

$$\therefore \quad f(x) = (x-\alpha)^2 \phi(x), \text{ ಇಲ್ಲಿ } \phi(\alpha) \neq 0.$$

$$\therefore \quad f'(x) = (x-\alpha)^2 \phi'(x) + 2(x-\alpha)\phi(x)$$

$$= (x-\alpha)\psi(x), \text{ ಇಲ್ಲಿ } \psi(x) = (x-\alpha)\phi' + 2\phi$$

$$\therefore \quad \psi(\alpha) \neq 0.$$

ಆದ್ದರಿಂದ α ಎಂಬುದು $f(x)$ಗೆ ಎರಡು ಸಲ ಮೂಲವಾಗಿದ್ದರೆ, (ಅಥವಾ $f(x)$ನ ಎರಡು ಮೂಲಗಳು α ಆಗಿದ್ದರೆ). α ಎಂಬುದು $f'(x)$ಗೆ ಒಂದು ಸಲ ಮೂಲವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಹೀಗೆಯೇ $f(x) = (x-\alpha)^3 \phi(x)$, $\phi(\alpha) \neq 0$ ಆದರೆ, ಎಂದರೆ $f(x)$ನ ಮೂರು ಮೂಲಗಳು α ಆದರೆ,

$$f'(x) = (x-\alpha)^3 \phi'(x) + 3(x-\alpha)^2 \phi(x)$$

$$= (x-\alpha)^2 \psi(x), \quad \psi(\alpha) \neq 0$$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಮೇಲಿನಂತೆ $f''(x) = (x-\alpha)\,\theta(x)$, $\theta(\alpha) \neq 0$ $f(x)$ನ ಮೂರು ಮೂಲಗಳು ಸಮನಿದ್ದರೆ, ಈ ಸಮ ಮೂಲವು $f'(x)$ಗೆ ಎರಡು ಮೂಲಗಳಾಗಿಯೂ $f''(x)$ ಗೆ ಒಂದು ಮೂಲವಾಗಿಯೂ ಪರಿಣಮಿಸುವುದು.

ಹೀಗೆಯೇ α ಎಂಬುದು $f(x)$ಗೆ r–ಮಡಿ ಮೂಲ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಎಂದರೆ $f(x)$ನ r ಮೂಲಗಳು α ಆಗಿದ್ದರೆ, ಈ α ಎಂಬುದು $f'(x)$ಗೆ $(r-1)$–ಮಡಿ ಮೂಲವಾಗಿ, $f''(x)$ಗೆ $(r-2)$–ಮಡಿಮೂಲವಾಗಿ, ಇತ್ಯಾದಿಯಾಗಿ $f^{(r-1)}(x)$ಗೆ ಒಂದು ಮೂಲವಾಗಿ ಇರುವುದು. $f^{(r)}(x)$ಗೆ α ಮೂಲವಾಗಿರುವುದಿಲ್ಲ.

ವಿಲೋಮವಾಗಿ, α **ಎಂಬುದು** $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, ... $f^{(r-1)}(x)$ **ಗಳಿಗೆ ಸಾಮಾನ್ಯ ಮೂಲವಾಗಿದ್ದರೆ,** α **ಎಂಬುದು** $f(x)$**ನ** r**–ಮಡಿಮೂಲ,** $f'(x)$**ನ** $(r-1)$**–ಮಡಿಮೂಲ, ಇತ್ಯಾದಿ.**

ಸಾಧನೆ. $f(x) = f(\alpha + \overline{x-\alpha})$

$$= f(\alpha) + (x-\alpha) f'(\alpha) + \frac{(x-\alpha)^2}{2!} f''(\alpha) + \cdots + \frac{(x-\alpha)^{r-1}}{\overline{r-1}\,!} f^{r-1}(\alpha)$$

$$+ \frac{(x-\alpha)^r}{r!} f^{(r)}\alpha + \ldots \ldots$$ (ಟೈಲರನ ಪ್ರಮೇಯ, ಕಲನಶಾಸ್ತ್ರ)

ಈಗ, ದತ್ತದಿಂದ $f(\alpha) = 0, f'(\alpha) = 0, \cdots, f^{(r-1)}(\alpha) = 0$. $f^{(r)}(\alpha) \neq 0$.

$$\therefore \quad f(x) = (x-\alpha)^r \phi(x), \quad \phi(\alpha) \neq 0.$$

Examples.

1. Solve the equation $3x^3-2x^2-5x+4=0$, given that it has two roots equal.

$$f(x) \equiv 3x^3-2x^2-5x+4$$
$$f'(x) \equiv 9x^2-4x-5=(x-1)(9x+5)$$

If $f(x)$ has equal roots, it is a root of $f'(x)$ also. Hence it is either $x=1$ or $x=-\frac{5}{9}$.

Now $f(1)=3-2-5+4=0$.

$\therefore$ $x=1$ must be a root of $f(x)$ twice. In other words $(x-1)^2$ is a factor of $f(x)$. (This may be verified, if desired).

Two roots of $f(x)$ are 1, 1. The sum of the roots $=\frac{2}{3}$.
$\therefore$ The third root is $\frac{2}{3}-2=-\frac{4}{3}$.

2. Solve the equation $2x^4+x^3-9x^2-13x-5=0$ by examining for equal roots.

$$f(x) \equiv 2x^4+x^3-9x^2-13x-5$$
$$f'(x) \equiv 8x^3+3x^2-18x-13.$$

If $f(x)$ has equal roots, $f(x)$ and $f'(x)$ should have a common root or roots. This (or these) becomes a root of the H. C. F. of $f(x)$ and $f'(x)$. The H. C. F. of $f(x)$ and $f'(x)$ can be found by the method of factors or by the long method.

H. C. F. $=(x+1)^2$.
$\therefore$ $(x+1)^3$ is a factor of $f(x)$
$\therefore$ Three roots of $f(x)$ are $-1, -1, -1$.
The fourth root $=-\frac{1}{2}-(-3)=2\frac{1}{2}$.

3. Solve $x^4-2x^3-3x^2+4x+4=0$ by examining for equal roots.

$$f(x) \equiv x^4-2x^3-3x^2+4x+4$$
$$f'(x)=4x^3-6x^2-6x+4=2(2x^3-3x^2-3x+2)$$
$$=2(x-2)(x+1)(2x-1).$$

ಉದಾಹರಣೆಗಳು.

1. $3x^3-2x^2-5x+4=0$ ಸಮೀಕರಣದ ಎರಡು ಮೂಲಗಳು ಸಮ ಎಂದು ದತ್ತವಾಗಿದೆ. ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ.

$$f(x)\equiv 3x^3-2x^2-5x+4$$

$$f'(x)\equiv 9x^2-4x-5=(x-1)(9x+5).$$

$f(x)$ ಗೆ ಸಮ ಮೂಲಗಳಿರುವುದಾದರೆ, ಅದು $f'(x)$ ಗೂ ಮೂಲವಾಗಿರಬೇಕು. ಎಂದರೆ $x=1$ ಅಥವಾ $x=-5/9$ ಆಗಿರಬೇಕು.

$x=1$ ಎಂಬುದು $f(x)$ ನ ಮೂಲವೆಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟ, ಏಕೆಂದರೆ
$f(1)=3-2-5+4=0.$

ಆದ್ದರಿಂದ, $x=1$ ಎಂಬುದು $f(x)$ ಗೆ ಎರಡು ಸಲ ಮೂಲವಾಗಿರಬೇಕು. ಅಥವಾ $f(x)$ ಗೆ $(x-1)^2$ ಅಪವರ್ತನ. (ಇದನ್ನು ಬೇಕಾದರೆ ಪರೀಕ್ಷಿಸಬಹುದು)

$f(x)$ ನ ಎರಡು ಮೂಲಗಳು 1, 1. ಮೂಲಗಳ ಮೊತ್ತ $\frac{2}{3}$, ಆದ್ದರಿಂದ ಮೂರನೆಯ ಮೂಲ $\frac{2}{3}-2=-\frac{4}{3}$.

2. $2x^4+x^3-9x^2-13x-5=0$ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಸಮ ಮೂಲಗಳಿಗೆ ಪರೀಕ್ಷಿಸುವುದರ ಮೂಲಕ ಬಿಡಿಸಿ.

$$f(x)\equiv 2x^4+x^2-9x^3-13x-5$$
$$f'(x)\equiv 8x^3+3x^2-18x-13$$

$f(x)$ ಗೆ ಸಮಮೂಲಗಳಿದ್ದರೆ, $f(x)$ ಗೂ $f'(x)$ ಗೂ ಸಾಮಾನ್ಯ ಮೂಲ ಅಥವಾ, ಮೂಲಗಳಿರಬೇಕು. ಇವು $f(x)$, $f'(x)$ ಗಳ ಗರಿಷ್ಠಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನದ ಮೂಲವಾಗುತ್ತದೆ. $f(x), f'(x)$ ಗಳ ಗಳಗ. ಸಾ. ಅ. ವನ್ನು ಅಪವರ್ತನ ವಿಧಾನದಿಂದ ಅಥವಾ ದೀರ್ಘವಿಧಾನದಿಂದ ಪಡೆಯಬೇಕು.

ಗ. ಸಾ. ಅ. $(x+1)^2$

ಆದ್ದರಿಂದ, $f(x)$ ಗೆ $(x+1)^3$ ಅಪವರ್ತನವಾಗಿರಬೇಕು.

$\therefore$ ಮೂರು ಮೂಲಗಳು $-1, -1, -1$. ನಾಲ್ಕನೆಯ ಮೂಲ $-\frac{1}{2}-(-3)=2\frac{1}{2}$.

3. $x^4-2x^3-3x^2+4x+4=0$ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಸಮಮೂಲಗಳಿಗೆ ಪರೀಕ್ಷಿಸುವುದರ ಮೂಲಕ ಬಿಡಿಸಿ.

$$f(x)\equiv x^4-2x^3-3x^2+4x+4$$
$$f'(x)\equiv 4x^3-6x^2-6x+4=2(2x^3-3x^2-3x+2)$$
$$=2(x-2)(x+1)(2x-1)$$

It may be verified that $x = 2$ and $x = -1$ are both roots of $f(x)$. Therefore, both these are double roots of $f(x)$.

$\therefore$ The roots of $f(x)$ are 2, 2, -1, -1.

Otherwise, the H. C. F. of $f(x)$ and $f'(x)$ is $x^2-x-2 =(x-2)(x+1)$. Hence, as before.

4. Find the relations between the coefficients, if the equation $a_0 x^3 + 3 a_1 x^2 + 3a_2 x + a_3=0$ has (a) two roots equal (b) all the three roots equal. Find also the value of the equal root.

$$\text{(a)} \quad f(x) \equiv a_0 x^3 + 3 a_1 x^2 + 3 a_2 x + a_3=0 \qquad (1)$$

$$f'(x) \equiv 3(a_0 x^2 + 2a_1 x + a_2) = 0 \qquad (2)$$

If the equal root of $f(x)$ be called x, this is a common root between $f(x)$ and $f'(x)$. Hence (1) and (2) are simultaneously satisfied. The relation required is obtained by eliminating x. The elimination between a cubic equation and a quadratic equation is carried out as follows: We multiply (2) by x, after removing the factor 3, and subtract from (1).

$$a_0 x^3 + 3a_1 x^2 + 3a_2 x + a_3 = 0$$

$$a_0 x^3 + 2a_1 x^2 + a_2 x = 0$$

$$a_1 x^2 + 2a_2 x + a_3 = 0 \qquad (3)$$

We now solve (2) and (3) for x^2 and x

$$a_0 x^2 + 2a_1 x + a_2 = 0 \qquad (2)$$

$$a_1 x^2 + 2a_2 x + a_3 = 0 \qquad (3)$$

$$\therefore \frac{x^2}{2(a_1 a_3 - a_2^2)} = \frac{x}{a_1 a_2 - a_0 a_3} = \frac{1}{2(a_0 a_2 - a_1^2)}$$

$\therefore$ The relation between the coefficients is

$$4(a_1 a_3 - a_2^2)(a_0 a_2 - a_1^2) = (a_1 a_2 - a_0 a_3)$$

Value of the equal root $= x^2 : x$ or $x : 1$

$$= \frac{2(a_1 a_3 - a_2^2)}{a_1 a_2 - a_0 a_3} = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{2(a_0 a_2 - a_1^2)}$$

$x = 2$ ಮತ್ತು $x = -1$ ಎರಡೂ $f(x)$ನ ಮೂಲಗಳೆಂದು ಪರೀಕ್ಷಿಸ ಬಹುದು $\therefore$ ಇವೆರಡೂ $f(x)$ಗೆ ಇಮ್ಮಡಿ ಮೂಲಗಳು

$\therefore$ $f(x)$ನ ಮೂಲಗಳು 2, 2, —1, —1

ಅಥವಾ $f(x)$, $f'(x)$ಗಳ ಗ. ಸಾ. ಅ. $x^2-x-2=(x-2)(x+1)$ ಎಂದು, ಮೇಲಿನಂತೆಯೇ.

4. $a_o x^3 + 3a_1 x^2 + 3a_2 x + a_3 = 0$ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ (*a*) ಎರಡು ಮೂಲಗಳು ಸಮನಾಗಿರಲು (*b*) ಮೂರೂ ಮೂಲಗಳು ಸಮನಾಗಿರಲು, ಗುಣಕಗಳ ನಡುವೆ ಇರಬೇಕಾದ ಸಂಬಂಧಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಿರಿ, ಸಮಮೂಲದ ಬೆಲೆಯನ್ನೂ ಪಡೆಯಿರಿ.

$$(a)\quad f(x) \equiv a_o x^3 + 3a_1 x^2 + 3a_2 x + a_3 = 0 \quad (1)$$

$$f'(x) \equiv 3(a_o x^2 + 2a_1 x + a_2) = 0 \quad (2)$$

$f(x)$ನ ಸಮಮೂಲವನ್ನು x ಎಂದು ಕರೆದರೆ, ಇದು $f(x)$ಗೂ $f'(x)$ಗೂ ಸಾಮಾನ್ಯಮೂಲ. ಎಂದರೆ (1), (2) ಏಕಕಾಲದಲ್ಲಿ ನಿಜವಿರಬೇಕು. xನ್ನು, ವಿಸರ್ಜಿಸಿದರೆ, ನಮಗೆ ಬೇಕಾದ ಸಂಬಂಧವು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ಒಂದು ಘನ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೂ ಒಂದು ವರ್ಗಸಮೀಕರಣಕ್ಕೂ ನಡುವೆ ವಿಸರ್ಜನವನ್ನು ಹೀಗೆ ಮಾಡುತ್ತೇವೆ. ಅಪವರ್ತನವಾದ 3ನ್ನು ತೆಗೆದುಹಾಕಿದಮೇಲೆ (2)ನ್ನು x ನಿಂದ ಗುಣಿಸಿ (1) ರಿಂದ ಕಳೆಯುತ್ತೇವೆ.

$$\begin{array}{r} a_0 x^3 + 3a_1 x^2 + 3a_2 x + a^3 = 0 \\ a_0 x^3 + 2a_1 x^2 + a_2 x \qquad = 0 \\ \hline a_1 x^2 + 2a_2 x + a_3 = 0 \end{array} \quad (3)$$

ಈಗ, (2), (3)ಗಳನ್ನು x^2 ಮತ್ತು xಗೆ ಬಿಡಿಸುತ್ತೇವೆ

$$a_0 x^2 + 2a_1 x + a_2 = 0 \quad (2)$$

$$a_1 x^2 + 2a_2 x + a_3 = 0 \quad (3)$$

$$\therefore \quad \frac{x^2}{2(a_1 a_3 - a_2^2)} = \frac{x}{a_1 a_2 - a_0 a_3} = \frac{1}{2(a_0 a_2 - a_1^2)}$$

$\therefore$ ಗುಣಕಗಳಿಗಿರುವ ಸಂಬಂಧ $4(a_1 a_3 - a_2^2)(a_0 a_2 - a_1^2) = (a_1 a_2 - a_0 a_3)$

ಸಮ ಮೂಲದ ಬೆಲೆ $= x^2 : x$ ಅಥವಾ $x : 1$

$$= \frac{2(a_1 a_3 - a_2^2)}{a_1 a_2 - a_0 a_3} = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{2(a_0 a_2 - a_1^2)}.$$

(*b*) When all the roots are equal.

$$f(x) \equiv a_0 x^3 + 3a_1 x^2 + 3a_2 x + a_3 = 0 \qquad (1)$$

$$f'(x) \equiv 3(a_0 x^2 + 2a_1 x + a_2) = 0 \qquad (2)$$

$$f''(x) \equiv 6(a_0 x + a_1) = 0 \qquad (3)$$

These should have a common root.

$$\tfrac{1}{3} f'(x) = x(a_0 x + a_1) + (a_1 x + a_2) = 0$$

$$\therefore \quad a_1 x + a_2 = 0 \qquad (4)$$

$$\therefore \quad f(x) = x(a_0 x^2 + 2a_1 x + a_2) + (a_1 x^2 + 2a_2 x + a_3)$$

$$= 0 + x(a_1 x + a_2) + (a_2 x + a_3)$$

$$\therefore \quad a_2 x + a_3 = 0 \qquad (5)$$

From (3), (4), (5),

$$x = -\frac{a_1}{a_0} = -\frac{a_2}{a_1} = -\frac{a_3}{a_2}$$

$$\text{Hence} \quad \frac{a_0}{a_1} = \frac{a_1}{a_2} = \frac{a_2}{a_3}.$$

[These relations could be obtained directly, without the help of the calculus. If all the roots are equal, $f(x)$ becomes a perfect cube, say $f(x) = a_0 (x + \alpha)^3$. Equating the coefficients of this with those of (1), we can readily obtain the above relations.

Exercise 10·5.

Solve the following equations, by testing for equal roots :

1· (1) $9x^3 + 33x^2 + 7x - 49 = 0$

(2) $4x^4 - 5x^3 - 7x^2 + 13x - 5 = 0$

(3) $3x^4 - 13x^3 + 6x^2 + 36x - 40 = 0$

(4) $x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x + 9 = 0$

(5) $x^4 - 6x^2 + 8x - 3 = 0$

(6) $x^5 - x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x - 1 = 0$

(7) $x^5 - x^4 - 5x^3 + x^2 + 8x + 4 = 0$

(*b*) ಮೂರೂ ಮೂಲಗಳು ಸಮನಿದ್ದರೆ.

$$f\ (x)\ \equiv a_0 x^3 + 3\, a_1 x^2 + 3\, a_2 x + a_3 = 0 \qquad (1)$$

$$f'\ (x)\ \equiv 3\, (a_0 x^2 + 2\, a_1 x + a^2) \qquad = 0 \qquad (2)$$

$$f''(x)\ \equiv 6\, (\, a_0\, x\ +\ a_1\,) = 0 \qquad (3)$$

ಇವಕ್ಕೆ ಸಾಮಾನ್ಯ ಮೂಲವಿರಬೇಕು.

$$\tfrac{1}{3} f'(x) = x\, (a_0 x + a_1) + (a_1 x + a_2) \quad = 0$$

$$\therefore\quad a_1 x + a_2 \quad = 0 \qquad (4)$$

$$\therefore\quad f(x) = x\, (\, a_0 x^2 + 2a_1 x + a_2\,) + (\, a_1 x^2 + 2a_2 x + a_3\,)$$

$$= 0 + x\,(\, a_1 x + a_2\,) + (\, a_2 x + a_3\,)$$

$$\therefore\quad a_2 x + a_3 = 0 \qquad (5)$$

(3), (4), (5) ರಿಂದ $x = \frac{-a_1}{a_0}, = \frac{-a_2}{a_1}, = \frac{-a_3}{a_2}$

ಅಥವಾ $\frac{a_0}{a_1} = \frac{a_1}{a_2} = \frac{a_2}{a_3}$.

[ಈ ಸಂಬಂಧಗಳನ್ನು ಕಲನಶಾಸ್ತ್ರವಿಲ್ಲದೆಯೇ, ನೇರವಾಗಿ ಪಡೆಯಬಹುದು. ಮೂರೂ ಮೂಲಗಳು ಸಮನಿದ್ದರೆ, $f(x)$ ಒಂದು ಶುದ್ಧ ಘನ ಆಗುತ್ತದೆ. $f(\,x\,) = a_0(\,x + \alpha\,)^3$. ಇವರ ಗುಣಕಗಳನ್ನು (1) ರ ಗುಣಕಗಳೊಡನೆ ಸರಿದೂಗಿಸಿ ಮೇಲಿನ ಸಂಬಂಧಗಳನ್ನು ಒಡನೆಯೇ ಪಡೆಯಬಹುದು.]

ಅಭ್ಯಾಸ 10.5

1. ಸಮಮೂಲಗಳಿಗಾಗಿ ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ, ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ :

(1) $9x^3 + 33x^2 + 7x - 49 = 0$

(2) $4x^4 - 5x^3 - 7x^2 + 13x - 5 = 0$

(3) $3x^4 - 13x^3 + 6x^2 + 36x - 40 = 0$

(4) $x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x + 9 = 0$

(5) $x^4 - 6x^2 + 8x - 3 = 0$

(6) $x^5 - x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x - 1 = 0$

(7) $x^5 - x^4 - 5x^3 + x^2 + 8x + 4 = 0$

2. Show that the following equations do not possess equal roots:

(1) $2x^3 - 9x^2 + 12x - 5 = 0$

(2) $x^4 + 2x^3 + 3x^2 - 4x - 4 = 0$

3. If the equation $x^n - nax + (n-1)b = 0$ has two roots equal, show that $a^n = b^{n-1}$.

10·7. Rolle's Theorem. *If the function $f(x)$ is continuous in the closed interval (a, b), and if $f(a) = 0, f(b) = 0$, then $f'(x)$ vanishes once at least in the interval.*

This is Rolle's Theorem. The student will learn details and the consequences of the theorem in the calculus. The truth of the theorem will become evident by drawing the graph of $f(x)$.

The following is a sort of converse: If α and β are two consecutive roots of $f'(x)$, then in the interval (α, β), $f(x)$ cannot possess more than one root. For, if there are two roots, then by Rolle's Theorem, $f'(x)$ will have a root between them, so that α, β are not consecutive roots of $f'(x)$.

Let now $f(x)$ be of degree n, and all its roots real. Let these be written as $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_n$ in order. Therefore, $f'(x)$ has a root in (α_1, α_2), a root in (α_2, α_3), and so on, so that we get $n-1$ roots in this way. Since $f'(x)$ is of degree $n-1$, it cannot have more than one root in any of these intervals. Hence,

Theorem 6. *If $f(x)$ has all its roots real, then the roots of $f'(x), f''(x), \cdots$ are all real.*

2. ಇವುಗಳಿಗೆ ಸಮ ಮೂಲಗಳಿಲ್ಲವೆಂದು ತೋರಿಸಿ.

(1) $2x^3-9x^2+12x-5=0$

(2) $x^4+2x^3+3x^2-4x-4=0$

3. $x^n-nax+(n-1)b=0$ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಎರಡು ಮೂಲಗಳು ಸಮನಿದ್ದರೆ, $a^n=b^{n-1}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

10.7 ರೋಲನ ಪ್ರಮೇಯ $f(x)$ **ಉತ್ಪನ್ನವು** (a, b) **ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ (ಅಂತ್ಯ ಬಿಂದುಗಳೂ ಸೇರಿ) ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನತೆಯನ್ನು ಪಡೆದಿದ್ದು,** $f(a)=0$, $f(b)=0$ **ಆಗಿದ್ದರೆ,** $f'(x)$ **ಎಂಬುದು ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ ಒಮ್ಮೆಯಾದರೂ ಸೊನ್ನೆಯಾಗುವುದು.**

ಇದೇ ರೋಲನ ಪ್ರಮೇಯ. ಇದರ ವಿವರಗಳನ್ನೂ ಪರಿಣಾಮಗಳನ್ನೂ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯು ಕಲನ ಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಕಲಿಯುವನು. $f(x)$ ನ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಬರೆಯುವುದರಿಂದ, ಪ್ರಮೇಯದ ನಿಜಾಂಶವು ಒಡನೆಯೇ ಗೋಚರವಾಗುವುದು.

ಇದರ ವಿಲೋಮ (ಒಂದು ತರದ) ಪ್ರಮೇಯ: α, β ಎಂಬುವು $f'(x)$ ನ ಎರಡು ಅನುಕ್ರಮ ಮೂಲಗಳಾದರೆ, (α, β)ಯಲ್ಲಿ $f(x)$ ಒಂದು ಮೂಲಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಮೂಲಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಲಾರದು. ಏಕೆಂದರೆ, ಎರಡು ಮೂಲಗಳಿದ್ದರೆ, ರೋಲನ ಪ್ರಮೇಯದಂತೆ, ಅವುಗಳ ನಡುವೆ $f'(x)$ಗೆ ಮತ್ತೊಂದು ಮೂಲವು ದೊರಕುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ α, β ಎಂಬುವು $f'(x)$ಗೆ ಅನುಕ್ರಮ ಮೂಲಗಳಾಗುವುದಿಲ್ಲ.

ಈಗ, $f(x)$ ಉತ್ಪನ್ನವು n ಪ್ರಮಾಣದ್ದಾಗಿ, ಅದರ ಮೂಲಗಳೆಲ್ಲವೂ ವಾಸ್ತವವಾಗಿರಲಿ. ಕ್ರಮವಾಗಿ ಅವನ್ನು $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ ಎಂದು ಕರೆಯೋಣ. ಆದ್ದರಿಂದ $f'(x)$ಗೆ (α_1, α_2) ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಮೂಲ, (α_2, α_3) ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಮೂಲ, ಹೀಗೆ $n-1$ ಮೂಲಗಳು ದೊರಕುತ್ತವೆ. $f'(x)$ನ ಪ್ರಮಾಣ $n-1$ ಆದ್ದರಿಂದ, ಯಾವ ಅವಧಿಯಲ್ಲೇ ಆಗಲಿ ಒಂದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಮೂಲಗಳು ಇರಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ,

ಪ್ರಮೇಯ 6. $f(x)$**ನ ಎಲ್ಲಾ ಮೂಲಗಳೂ ವಾಸ್ತವಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದರೆ,** $f'(x)$, $f''(x)$, … **ಮುಂತಾದುವುಗಳ ಮೂಲಗಳೆಲ್ಲವೂ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು.**

In the proof above, we have assumed that $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ are all distinct. If α is a double root of $f(x)$, it is a single root of $f'(x)$, if it is a triple root of $f(x)$, it is a double root of $f'(x)$, and so on, as has been seen in 10·6. Hence the above theorem is true even if $f(x)$ has equal roots.

Conversely if $f'(x)$ or $f''(x)$, etc. has complex roots, $f(x)$ also must possess complex roots.

Examples :

1. If the roots of $a_0 x^4 + 4 a_1 x^3 + 6 a_2 x^2 + 4 a_3 x + a_4 = 0$ are all real, the roots of the equation $a_0 x^3 + 3 a_1 x^2 + 3 a_2 x + a_3 = 0$ are also all real.

2. The equation $(x-a)^3 + (x-b)^3 + (x-c)^3 + (x-d)^3 = 0$ has only one real root (a, b, c, d are not all equal)

$$\tfrac{1}{3} f'(x) = \Sigma (x-a)^2 > 0$$

$$\therefore f'(x) \text{ has no real roots.}$$

$\therefore$ The roots of $f(x)$ can not be all real, but one root must be real (Corollary to Theorem 3).

3. The equation $f(x) \equiv x^4 + 4x^3 + 30x^2 - 4x - 8 = 0$ has one positive root, one negative root, and two complex roots.

$$f'(x) \equiv 4(x^3 + 3x^2 + 15x - 1)$$

$$f''(x) \equiv 12(x^2 + 2x + 5)$$

The roots of $f''(x)$ are not real. Therefore $f(x)$ must possess complex roots. But $f(-\infty) = +\infty$, $f(0) = -\infty$, $f(+\infty) = +\infty$. Hence $f(x)$ must have one positive root and one negative root.

Corollary. The equation $x^3 + 3x^2 + 15x + k = 0$ has only one real root, for any value of k.

ಮೇಲಿನ ಸಾಧನೆಯಲ್ಲಿ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ ಎಲ್ಲವೂ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸಿದ್ದೇವೆ. $f(x)$ಗೆ α ಇಮ್ಮಡಿ ಮೂಲವಾದರೆ, $f'(x)$ಗೆ α ಒಮ್ಮಡಿಮೂಲ. ಮುಮ್ಮಡಿ ಮೂಲವಾದರೆ. $f'(x)$ಗೆ α ಇಮ್ಮಡಿ ಮೂಲ, ಇತ್ಯಾದಿ ಎಂದು 10.6ರಲ್ಲಿ ಕಂಡಿದ್ದೇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಮೇಲಣ ಪ್ರಮೇಯವು $f(x)$ಗೆ ಸಮ ಮೂಲಗಳಿದ್ದರೂ ನಿಜವಿರುತ್ತದೆ

ವಿಲೋಮವಾಗಿ, $f'(x)$ಗೆ ಅಥವಾ $f''(x)$ಗೆ, ಇತ್ಯಾದಿಯಾಗಿ, ಮಿಶ್ರ ಸಂಖ್ಯಾ ಮೂಲಗಳಿದ್ದರೆ. $f(x)$ಗೂ ಮಿಶ್ರ ಸಂಖ್ಯಾ ಮೂಲಗಳು ಇರಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು :

1. $a_0 x^4 + 4a_1 x^3 + 6a_2 x^2 + 4a_3 x + a_4 = 0$ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು ಎಲ್ಲವೂ ವಾಸ್ತವವಾದರೆ, $a_0 x^3 + 3a_1 x^2 + 3a_2 x + a_3 = 0$ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳೂ ವಾಸ್ತವ.

2. $(x-a)^3 + (x-b)^3 + (x-c)^3 + (x-d)^3 = 0$ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಒಂದು ಮೂಲಮಾತ್ರ ವಾಸ್ತವ (a, b, c, d ಎಲ್ಲವೂ ಸಮನಲ್ಲ).

$$\tfrac{1}{3} f'(x) = \Sigma (x-a)^2 > 0$$

$\therefore f'(x)$ ಗೆ ವಾಸ್ತವ ಮೂಲಗಳಿಲ್ಲ

$\therefore f(x)$ ನ ಮೂಲಗಳು ಎಲ್ಲವೂ ವಾಸ್ತವವಲ್ಲ, ಆದರೆ ಒಂದು ಮೂಲ ವಾಸ್ತವವಾಗಿ ಇರಲೇಬೇಕು (ಪ್ರಮೇಯ 3, ಅನುಮಿತ)

3. $f(x) \equiv x^4 + 4x^3 + 30x^2 - 4x - 8 = 0$ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಒಂದು ಧನ ಮೂಲವೂ, ಒಂದು ಋಣ ಮೂಲವೂ, ಎರಡು ಮಿಶ್ರಸಂಖ್ಯಾ ಮೂಲಗಳೂ ಇವೆ.

$$f'(x) \equiv 4(x^3 + 3x^2 + 15x - 1)$$
$$f''(x) \equiv 12(x^2 + 2x + 5)$$

$f''(x)$ನ ಮೂಲಗಳು ವಾಸ್ತವವಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ $f(x)$ಗೆ ಮಿಶ್ರಸಂಖ್ಯಾ ಮೂಲಗಳಿದ್ದೇ ಇರಬೇಕು. ಆದರೆ $f(-\infty) = +\infty$, $f(0) = -8$, $f(+\infty) = +\infty$ ಆದ್ದರಿಂದ, $f(x)$ಗೆ ಒಂದು ಧನ ಮೂಲವೂ ಒಂದು ಋಣಮೂಲವೂ ಇರಬೇಕು.

ಅನುಮಿತ : $x^3 + 3x^2 + 15x + k = 0$ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಒಂದು ಮೂಲ ಮಾತ್ರ ವಾಸ್ತವ (k ಯಾವುದೇ ಬೆಲೆಗೂ).

10.8 A Lemma. *If the roots of* $f(x)$ *are* $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$,

then $f'(x) = \dfrac{f(x)}{x-\alpha_1} + \dfrac{f(x)}{x-\alpha_2} + \cdots + \dfrac{f(x)}{x-\alpha_n}$.

For, $f(x) = a_0 (x-\alpha_1)(x-\alpha_2) \cdots (x-\alpha_n)$

$\therefore \ \log f(x) = \log a_0 + \log (x-\alpha_1) + \cdots + \log (x-\alpha_n)$

The required result follows by differentiating both sides.

10·9 *Newton's Formulae.* We shall now take $a_0 = 1$, and write $f(x)$ as

$$f(x) \equiv x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + p_3 x^{n-3} + \cdots + p_n = 0.$$

$$\therefore \ f'(x) = nx^{n-1} + (n-1) p_1 x^{n-2} + (n-2) p_2 x^{n-3}$$
$$+ (n-3) p_3 x^{n-4} + \cdots \qquad (1)$$

By 10·8, this is equal to $\Sigma \dfrac{f(x)}{x-\alpha}$.

By direct division,

$$\frac{f(x)}{x-\alpha} = x^{n-1} + (p_1 + \alpha) x^{n-2} + (p_2 + p_1 \alpha + \alpha^2) x^{n-3}$$
$$+ (p_3 + p_2 + p_1 \alpha^2 + \alpha^3) x^{n-4} + \cdots + (p_r + p_{r-1} \alpha$$
$$+ p_{r-2} \alpha^2 + \cdots + \alpha^r) x^{n-r-1} + \cdots \qquad (2)$$

When α takes any of the values $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, the remainder is zero.

Take $\alpha = \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ in order in (2), and add. Let us write $\alpha_1^k + \alpha_2^k + \cdots + \alpha_n^k = s_k$.

$$\therefore \ \Sigma \frac{f(x)}{x-\alpha} = nx^{n-1} + (np_1 + s_1) x^{n-2} + (np_2 + p_1 s_1 + s_2) x^{n-3}$$

$$+ \cdots + (np_r + p_{r-1} s_1 + p_{r-2} s_2 + \cdots + s_r) x^{n-r-1} + \cdots \qquad (3)$$

10.8. ಒಂದು ಉಪಪ್ರಮೇಯ. $f(x)$ ನ ಮೂಲಗಳು $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ ಆದರೆ,

$$f'(x) = \frac{f(x)}{x-\alpha_1} + \frac{f(x)}{x-\alpha_2} + \cdots + \frac{f(x)}{x-a^n}$$

ಏಕೆಂದರೆ $f(x) = a_0 (x-\alpha_1)(x-\alpha_2) \cdots (x-\alpha_n)$

$$\therefore \log f(x) = \log a_0 + \log(x-\alpha_1) + \cdots + \log(x-\alpha_n).$$

ಎರಡು ಕಡೆಯೂ ನಿಷ್ಪನ್ನಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವುದರಿಂದ, ಮೇಲಣ ಫಲಿತಾಂಶವು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ.

10.9. ನ್ಯೂಟನ್ನನ ಸೂತ್ರಗಳು.

ಈಗ $a_0 = 1$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು,

$$f(x) \equiv x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + p_3 x^{n-3} + \cdots + p_n = 0$$

ಎಂದು ಬರೆಯುವೆವು.

$$f'(x) = nx^{n-1} + (n-1)p_1 x^{n-2} + (n-2)p_2 x^{n-3} + (n-3)p_3 x^{n-4} + \cdots \quad (1)$$

10.8 ರಿಂದ, ಇದು $\Sigma \frac{f(x)}{x-\alpha}$ ಆಗುತ್ತದೆ;

ನೇರವಾದ ಭಾಗಹಾರದಿಂದ,

$$\frac{f(x)}{x-\alpha} = x^{n-1} + (p_1 + \alpha) x^{n-2} + (p_2 + p_1\alpha + \alpha^2) x^{n-3} + (p_3 + p_2\alpha + p_1\alpha^2 + \alpha^3) x^{n-4}$$
$$+ \cdots + (p_r + p_{r-1}\alpha + p_{r-2}\alpha^2 + \cdots + \alpha_r) x^{n-r-1} + \cdots \quad (2)$$

αನ ಬೆಲೆ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಆದಾಗ ಶೇಷ ಸೊನ್ನೆಯಾಗುತ್ತದೆ.

(2)ರಲ್ಲಿ αಗೆ ಕ್ರಮವಾಗಿ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ ಹಾಕಿ ಕೂಡೋಣ.

$\alpha_1^k + \alpha_2^k + \cdots + \alpha_n^k$ ಎಂಬುದನ್ನು s_k ಎಂದು ಬರೆಯೋಣ.

$$\therefore \Sigma \frac{f(x)}{x-\alpha} = n x^{n-1} + (np_1 + s_1)x^{n-2} + (np_2 + p_1 s_1 + s_2) x^{n-3}$$
$$+ \cdots + (np_r + p_{r-1}s_1 + p_{r-2}s_2 + \cdots + s_r) x^{n-r-1} + \cdots \quad (3)$$

Equating coefficients of like powers of x in (1) and (3), we have

$$np_1 + s_1 = (n-1)\,p_1$$
$$np_2 + p_1 s_1 + s_2 = (n-2)\,p_2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$np_r + p_{r-1} s_1 + \cdots + s_r = (n-r)\,p_r$$

etc.

Simplifying, we have

$$\left.\begin{aligned}
&s_1 + p_1 = 0\\
&s_2 + p_1 s_1 + 2p_2 = 0\\
&s_3 + p_1 s_2 + p_2 s_1 + 3p_3 = 0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&p_r + p_1 s_{r-1} + p_2 s_{r-2} + \cdots + rp_r = 0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\text{the last being } s_{n-1} + p_1 s_{n-2} + \cdots (n-1)\,p_{n-1} = 0
\end{aligned}\right\} \quad (A)$$

Now, putting $x = \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ in

$$f(x) \equiv x^n + p_1 x^{n-1} + \cdots + p_n = 0,$$

we get on adding

$$s_n + p_1 s_{n-1} + \cdots + np_n = 0. \qquad (B)$$

[(B) is of the same form as (A), corresponding to $r = n$.]

Next, let us multiply $f(x)$ by x, x^2, x^3, etc.

$$\therefore \quad x^{n+1} + p_1 x^n + \cdots + p_n x = 0$$
$$x^{n+2} + p_1 x^{n-1} + \cdots + p_n x^2 = 0$$

and so on.

Putting $x = \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ in order, in each of these, and adding, we have

$$\left.\begin{aligned}
&s_{n+1} + p_1 s_n + p_2 s_{n-1} + \cdots + p_n s_1 = 0\\
&s_{n+2} + p_1 s_{n+1} + \cdots + p_n s_2 = 0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&s_{n+r} + p_1 s_{n+r-1} + \cdots + p_n s_r = 0
\end{aligned}\right\} \quad (C)$$

The formulae (A), (B), (C) are called Newton's formulae.

(1) ಮತ್ತು (3)ರಲ್ಲಿ x ನ ಸಮಘಾತ ಪದಗಳನ್ನು ಸರಿದೂಗಿಸುವುದರಿಂದ,

$$n\,p_1 + s_1 = (n-1)\,p_1$$
$$n\,p_2 + s_1\,p_1 + s_2 = (n-2)p_2$$
$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$
$$n\,p_r + p_{r-1}\,s_1 + \cdots + s_r = (n-r)p_r$$

ಇತ್ಯಾದಿ. ಇವನ್ನು ಸುಲಭರೂಪಕ್ಕೆ,

$$\left.\begin{aligned} & s_1 + p_1 = 0 \\ & s_2 + p_1\,s_1 + 2\,p_2 = 0 \\ & s_3 + p_1\,s_2 + p_2\,s_1 + 3\,p_3 = 0 \\ & \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ & s_r + p_1\,s_{r-1} + p_2\,s_{r-2} + \dots + r\,p_r = 0 \\ & \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ \text{ಕಡೆಯದು, } & s_{n-1} + p_1\,s_{n-2} + \dots + (n-1)\,p_{n-1} = 0 \end{aligned}\right\} \quad (A)$$

ಈಗ $f(x) \equiv x^n + p_1\,x^{n-1} + \dots + p_n = 0$ ಎಂಬುದರಲ್ಲಿ x ಗೆ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟು ಕೂಡುವ.

$$\therefore \quad s_n + p_1\,s_{n-1} + \dots + n\,p_n = 0 \qquad (B)$$

[(B), (A)ಯ ರೂಪದಲ್ಲಿಯೇ ಇದೆ, $r=n$ ಹಾಕಿದರೆ, (B) ಬರುತ್ತದೆ].

ಇನ್ನು $f(x)$ನ್ನು x, x^2, x^3, … ಇತ್ಯಾದಿಗಳಿಂದ ಗುಣಿಸುವ

$$\therefore \quad x^{n+1} + p_1\,x^n + \dots + p_n\,x = 0$$
$$x^{n+2} + p_1\,x^{n+1} + \dots + p_n\,x^2 = 0$$

ಇತ್ಯಾದಿ

ಇವುಗಳಲ್ಲಿ x ಗೆ ಕ್ರಮವಾಗಿ $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n$ ಹಾಕಿ ಕೂಡುವ.

$$\therefore \left.\begin{aligned} & s_{n+1} + p_1\,s_n + p_2\,s_{n-1} + \dots + p_n\,s_1 = 0 \\ & s_{n+2} + p_1\,s_{n+1} + \quad \cdots \quad + p_n\,s_2 = 0 \\ & \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ & s_{n+r} + p_1 s_{n+r-1} + \quad \cdots \quad + p_n s_r = 0 \end{aligned}\right\} \quad (C)$$

(A), (B), (C) ಸೂತ್ರಗಳಿಗೆ ನ್ಯೂಟನ್ನನ ಸೂತ್ರಗಳೆಂದು ಹೆಸರು.

These give in order

$$s_1 = \Sigma \alpha = -p_1$$
$$s_2 = \Sigma \alpha^2 = p_1^2 - 2p_2, \text{ and so on ;}$$

the value of $s_r = \Sigma \alpha^r$ is obtained by the help of the previous ones $s_1, s_2, \cdots, s_{r-1}$.

Examples :

1. The roots of the equation $x^4 - 5x^3 + 6x^2 + 4x - 7 = 0$ are $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Find the value of $\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4 + \delta^4$.

In terms of the above notation.

$$s_1 = -p_1 = 5$$
$$s_2 - 5s_1 + 12 = 0 \quad \therefore s_2 = 13$$
$$s_3 - 5s_2 + 6s_1 + 12 = 0 \quad \therefore s_3 = 23$$
$$s_4 - 5s_3 + 6s_2 + 4s_1 - 28 = 0 \quad \therefore s_4 = -11.$$

2. If α, β, γ are the roots of $x^3 + 3x + 9 = 0$, show that $\alpha^9 + \beta^9 + \gamma^9 = 0$.

$$x^3 = -3(x+3) \quad \therefore x^9 = -27(x^3 + 9x^2 + 27x + 27)$$

Put $x = \alpha, \beta, \gamma$ in turn, and add.

$$\therefore \alpha^9 + \beta^9 + \gamma^9 = -27(s_3 + 9s_2 + 27s_1 + 81)$$
$$s_1 = 0,\ s_2 + 6 = 0, \quad s_3 + 3s_1 + 27 = 0.$$
$$\therefore s_2 = -6, \quad s_3 = -27.$$
$$\therefore \alpha^9 + \beta^9 + \gamma^9 = -27(-27 - 54 + 81) = 0.$$

Exercise 10·6

1. If α, β, γ are the roots of $x^3 - 7x^2 + 7x - 4 = 0$, find the values of $\Sigma \alpha^3$ and $\Sigma \alpha^5$.

2. If α, β, γ are the roots of $x^3 + px + q = 0$, prove that $\Sigma \alpha^n = -p \, \Sigma \alpha^{n-2} - q \, \Sigma \alpha^{n-3}$.

   [Multiply the given equation by x^{n-3}, put $x = \alpha, \beta, \gamma$ in turn and add]

ಇವುಗಳಿಂದ, ಕ್ರಮವಾಗಿ

$$s_1 = \Sigma\alpha = -p_1$$
$$s_2 = \Sigma\alpha^2 = p_1^2 - 2p_2$$

ಇತ್ಯಾದಿಯಾಗಿ $s_r = \Sigma\alpha^r$ ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಹಿಂದಿನ $s_1, s_2, \cdots, s_{r-1}$ ಗಳ ಬೆಲೆಗಳ ಸಹಾಯದಿಂದ ಪಡೆಯಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು.

1. $x^4 - 5x^3 + 6x^2 + 4x - 7 = 0$ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ಆದರೆ $\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4 + \delta^4$ ನ ಬೆಲೆಯೇನು ?

ಮೇಲಿನ ಸಂಕೇತದಿಂದ,
$$s_1 = -p_1 = 5$$
$$s_2 - 5s_1 + 12 = 0 \quad \therefore \quad s_2 = 13$$
$$s_3 - 5s_2 + 6s_1 + 12 = 0 \quad \therefore \quad s_3 = 23$$
$$s_4 - 5s_3 + 6s_2 + 4s_1 - 28 = 0 \quad \therefore \quad s_4 = 11.$$

2. $x^3 + 3x + 9 = 0$ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು α, β, γ ಆದರೆ, $\alpha^9 + \beta^9 + \gamma^9 = 0$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

$$x^3 = -3(x+3) \quad \therefore \quad x^9 = -27(x+3)^3$$
$$= -27(x^3 + 9x^2 + 27x + 27)$$

x ಗೆ α, β, γ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಹಾಕಿ ಕೂಡಿ.

$$\therefore \alpha^9 + \beta^9 + \gamma^9 = -27(s_3 + 9s_2 + 27s_1 + 81).$$
$$s_1 = 0, \quad s_2 + 6 = 0, \quad s_3 + 3s_1 + 27 = 0$$
$$\therefore s_2 = -6, \quad s_3 = -27.$$
$$\therefore \alpha^9 + \beta^9 + \gamma^9 = -27(-27 - 54 + 81) = 0.$$

ಅಭ್ಯಾಸ 10.6

1. $x^3 - 7x^2 + 7x - 4 = 0$ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು α, β, γ ಆದರೆ $\Sigma\alpha^3$ ಮತ್ತು $\Sigma\alpha^5$ ಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಿರಿ.

2. $x^3 + p + q = 0$ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು α, β, γ ಆದರೆ,
$$\Sigma\alpha^n = -p\,\Sigma\alpha^{n-2} - q\,\Sigma\alpha^{n-3}$$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

[ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು x^{n-3} ಇಂದ ಗುಣಿಸಿ, x ಗೆ $\alpha, \beta\ \gamma$ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟು ಕೂಡಿರಿ.]

3. If α, β, γ are the roots of $x^3+px+q=0$, prove that

$$3(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(\alpha^5+\beta^5+\gamma^5)=5(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)(\alpha^4+\beta^4+\gamma^4).$$

4. For the equation $x^8+ax+b=0$, prove that $s^{16}=8b^2$.

5. If $s_1=3$, $s_2=5$, $s_3=9$, $p_4=4$, find s_4.

6. Find the cubic equation having $\alpha+\beta+\gamma=2$, $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=6$, $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=11$. Find also the value of $\alpha^5+\beta^5+\gamma^5$.

7. If $\alpha_1, \alpha_2, \cdots,$ are the roots of the equation

$$x^n+\frac{x^{n-1}}{1!}+\frac{x^{n-2}}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}=0,$$

prove that $\Sigma\,\alpha^r=0$, $(r=2, 3, 4, \cdots, n)$.

10·9. *Symmetric Functions of the Roots.* If a function involving all the roots of (x) is unaltered by interchange of any two roots, it is called a symmetric function.

Example: If α, β, γ are the roots of a cubic equation, $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\beta^2\gamma+\beta\gamma^2+\gamma^2\alpha+\gamma\alpha^2$ is a symmetric function, since this remains unaltered by interchanging α, β or β, γ or γ, α. But $\alpha^2\beta+\beta^2\gamma+\gamma^2\alpha$ is not a symmetric function.

We have dealt with several symmetric functions by now. If $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ are the roots of the equation of the n^{th} degree, $\Sigma\,\alpha$, $\Sigma\,\alpha_1\alpha_2$, $\Sigma\,\alpha_1\alpha_2\alpha_3, \cdots, s_1, s_2, s_3, \cdots$ are all symmetric functions. We have seen that all these can be expressed as simple functions of the coefficients of the given equation. There is a general theorem of Newton:

Any rational symmetric function of the roots of a polynomial equation can be expressed as a rational function of the coefficients of the equation.

3. $x^3+px+q=0$ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು α, β, γ ಆದರೆ $3(\alpha^2+\beta^2+\gamma)(\alpha^5+\beta^5+\gamma^5)=5(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)(\alpha^4+\beta^4+\gamma^4)$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

4. $x^8+ax+b=0$ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ, $s^{16}=8b^2$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

5. $s_1=3, s_2=5, s_3=9$ $p_4=4$ ಆದರೆ. s_4 ನ ಬೆಲೆಯೆಷ್ಟು ?

6. $\alpha+\beta+\gamma=2,\ \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=6,\ \alpha^3+\beta^3+\gamma^3=11$ ಆಗಿರುವಂತಹ ಘನಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಪಡೆಯಿರಿ. $\alpha^5+\beta^5+\gamma^5$ ನ ಬೆಲೆಯನ್ನೂ ಪಡೆಯಿರಿ.

7. $x^n+\dfrac{x^{n-1}}{1!}+\dfrac{x^{n-2}}{2!}+\cdots+\dfrac{1}{n!}=0$ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ ಆದರೆ, $\Sigma\alpha^r=0, (r=2, 3, 4 \ldots, n)$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

10.9. **ಮೂಲಗಳ ಸಮಾಂಗ ಉತ್ಪನ್ನಗಳು.** $f(x)$ ನ ಎಲ್ಲ ಮೂಲಗಳನ್ನೂ ಒಳಗೊಂಡಿರುವ ಉತ್ಪನ್ನದಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಮೂಲಗಳನ್ನು ಅದಲು ಬದಲು ಮಾಡುವುದರಿಂದ ಉತ್ಪನ್ನವು ಬದಲಾಗದಿದ್ದರೆ, ಅದನ್ನು ಸಮಾಂಗ ಉತ್ಪನ್ನವೆಂದು ಕರೆಯುವೆವು.

ಉದಾ: α, β, γ ಒಂದು ಘನಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳಾದರೆ, $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\beta^2\gamma+\beta\gamma^2+\gamma^2\alpha+\gamma\alpha^2$ ಒಂದು ಸಮಾಂಗ ಉತ್ಪನ್ನ. ಇದರಲ್ಲಿ α, β ಗಳನ್ನಾಗಲಿ β, γ ಗಳನ್ನಾಗಲಿ, γ, α ಗಳನ್ನಾಗಲಿ ಅದಲು ಬದಲು ಮಾಡುವುದರಿಂದ, ಉತ್ಪನ್ನವು ಬದಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ. $\alpha^2\beta+\beta^2\gamma+\gamma^2\alpha$ ಎಂಬುದು ಸಮಾಂಗ ಉತ್ಪನ್ನವಲ್ಲ.

ಇದುವರೆಗೆ ಅನೇಕ ಸಮಾಂಗ ಉತ್ಪನ್ನಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿದ್ದೇವೆ. n ಪ್ರಮಾಣದ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ ಆದರೆ, $\Sigma\alpha, \Sigma\alpha_1\alpha_2, \Sigma\alpha_1\alpha_2\alpha_3,$, $s_1, s_2, s_3, \ldots$, ಎಲ್ಲವೂ ಸಮಾಂಗ ಉತ್ಪನ್ನಗಳು. ಇವನ್ನೆಲ್ಲಾ ಸಮೀಕರಣದ ಗುಣಕಗಳ ಸುಲಭ ಉತ್ಪನ್ನಗಳಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದೆಂಬುದನ್ನು ಕಂಡಿದ್ದೇವೆ. ನ್ಯೂಟನ್ನನ ಸಾರ್ವತ್ರಿಕ ಪ್ರಮೇಯವೊಂದಿದೆ.

ಒಂದು ಬಹುಪದಿ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳ ಯಾವುದೇ ಸಮಾಂಗ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು ಸಮೀಕರಣದ ಗುಣಕಗಳ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

We shall illustrate the theorem by one or two easy examples.

(1) Obtain the value of $\Sigma\, \alpha_1^2\, \alpha_2\, \alpha_3$.

Multiplying

$(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4 \cdots)(\alpha_1\alpha_2\alpha_3+\alpha_1\alpha_3\alpha_4+\alpha_1\alpha_2\alpha_4+\alpha_2\alpha_3\alpha_4+\cdots)$, we obtain all terms of the form $\alpha_1^2\, \alpha_2\, \alpha_3$, and terms of the form $\alpha_1\, \alpha_2\, \alpha_3\, \alpha_4$ four times.

$$\therefore\ \Sigma\alpha \cdot \Sigma\alpha_1\, \alpha_2\, \alpha_3 = \Sigma\alpha_1^2\, \alpha_2\, \alpha_3 + 4\, \Sigma\, \alpha_1\, \alpha_2\, \alpha_3\, \alpha_4$$

$$\therefore\ \Sigma\, \alpha_1^2\, \alpha_2\, \alpha_3 = p_1\, p_3 - 4\, p_4.$$

(2) $\Sigma\, \alpha_1^2\, \alpha_2^2$.

We may verify that $(\alpha_1\, \alpha_2 + \alpha_1\, \alpha_3 + \cdots + \alpha_2\, \alpha_3 + \cdots)^2$

$$= \Sigma\, \alpha_1^2\, \alpha_2^2 + 2\, \Sigma\, \alpha_1^2\, \alpha_2\, \alpha_3 + 6\, \Sigma\, \alpha_1\, \alpha_2\, \alpha_3\, \alpha_4.$$

$$\therefore \Sigma\, \alpha_1^2\, \alpha_2^2 = p_2^2 - 2\,(p_1\, p_3 - 4p_4) - 6p_4, \quad \text{using (1)}.$$

$$= p_2^2 - 2\, p_1\, p_3 + 2p_4.$$

ಒಂದೆರಡು ಸುಲಭವಾದ ಉದಾಹರಣೆಗಳಿಂದ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಉದಹರಿಸುವೆವು.

(1) $\Sigma \alpha_1^2 \alpha_2 \alpha_3$ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಪಡೆಯಿರಿ.

$(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\cdots).(\alpha_1\alpha_2\alpha_3+\alpha_1\alpha_3\alpha_4+\alpha_1\alpha_2\alpha_4+\alpha_2\alpha_3\alpha_4+\cdots)$ ಇವನ್ನು ಗುಣಿಸಿದರೆ, $\alpha_1^2\alpha_2\alpha_3$ ರೂಪದ ಎಲ್ಲಾ ಪದಗಳೂ, $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$ ರೂಪದ ಪದಗಳು ನಾಲ್ಕು ಸಲವೂ ಬರುತ್ತವೆ.

$$\therefore \Sigma\alpha.\ \Sigma \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 = \Sigma \alpha_1^2 \alpha_2 \alpha_3 + 4\,\Sigma \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$$

$$\therefore \Sigma \alpha_1^2 \alpha_2 \alpha_3 = p_1 p_3 - 4p_4.$$

(2) $\Sigma \alpha_1^2\alpha_2^2$.

$(\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\cdots+\alpha_2\alpha_3+-\cdots)^2 = \Sigma \alpha_1^2\alpha_2^2 + 2\Sigma\alpha_1^2\alpha_2\alpha_3 + 6\Sigma\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$ ಎಂದು ಪರೀಕ್ಷಿಸಬಹುದು.

$$\therefore \Sigma \alpha_1^2\alpha_2^2 = p_2^2 - 2(p_1 p_3 - 4p_4) - 6p_4, \quad (1) \text{ ರಿಂದ}$$

$$= p_2^2 - 2p_1 p_3 + 2p_4.$$

CHAPTER 11

Theory of Equations (2) —Transformation of Equations.

11·1. Let $\alpha_1, \alpha_2 \cdots, \alpha_n$ be the roots of a given equation

$$f(x) \equiv a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_n = 0. \qquad (1)$$

We are now concerned with the problem of constructing another equation whose roots are given symmetric functions of the roots of the given equation. We commence with simple examples.

(I) To construct an equation whose roots are $k\alpha_1, k\alpha_2, \cdots, k\alpha_n$
Let the required equation be

$$b_0 y^n + b_1 y^{n-1} + b_2 y^{n-2} + \cdots + b_n = 0 \qquad (2)$$

$$\therefore \ -\frac{b_1}{b_0} = \Sigma k\alpha = k \Sigma \alpha = -\frac{ka_1}{a_0}$$

$$\frac{b_2}{b_0} = \Sigma k\alpha_1 \cdot k\alpha_2 = k^2 \Sigma \alpha_1 \alpha_2 = \frac{k a_2}{a_0}$$

Similarly $-\frac{b_3}{b_0} = \frac{k^3 a_3}{a_0}$, and so on.

There is no objection in taking $b_0 = a_0$

$$\therefore b_1 = k a_1, \quad b_2 = k^2 a_2, \cdots \quad \cdots$$

$\therefore$ The required equation is

$$a_0 x^n + k a_1 x^{n-1} + k^2 a_2 x^{n-2} + \cdots + k^n a_n = 0.$$

(We can write x for y).

This method can be employed only in the simplest cases, in other cases it will be a difficult process. We shall not use this method hereafter. We shall explain the principle of the transformation process, and use the method based on this principle.

ಅಧ್ಯಾಯ 11

ಸಮೀಕರಣ ಸಿದ್ಧಾಂತ (2)—ಸಮೀಕರಣಗಳ ರೂಪಾಂತರ ಕರಣ.

11.1 $f(x) \equiv a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_n = 0$ (1)

ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n$ ಆಗಿರಲಿ. ಈ ಮೂಲಗಳ ಸಮಾಂಗ ಉತ್ಪನ್ನಗಳನ್ನು ಮೂಲಗಳಾಗಿ ಉಳ್ಳ ಬೇರೊಂದು ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ರಚಿಸುವುದೇ ಈಗ ಪ್ರಶ್ನೆ. ಸುಲಭವಾದ ಉದಾಹರಣೆಗಳಿಂದ ಆರಂಭಿಸೋಣ.

(I) $k\alpha_1 . k\alpha_2, \cdots, k\alpha_n$ ಗಳನ್ನು ಮೂಲಗಳನ್ನಾಗಿ ಉಳ್ಳ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಪಡೆಯುವಿಕೆ.

ಬೇಕಾದ ಸಮೀಕರಣವು $b_0 y^n + b_1 y^{n-1} + b_2 y^{n-2} + \cdots + b_n = 0$ (2) ಆಗಿರಲಿ.

$$\therefore \quad -\frac{b_1}{b_0} = \Sigma\, k\,\alpha = k\,\Sigma\,\alpha = -k\,\frac{a_1}{a_0}$$

$$\frac{b_2}{b_0} = \Sigma\, k\alpha_1 \cdot k\alpha_2 = k^2\,\Sigma\,\alpha_1\,\alpha_2 = k^2\frac{a_2}{a_0}$$

ಹೀಗೆಯೇ $\dfrac{b_3}{b_0} = \dfrac{k^3\,a_3}{a_0}$, ಇತ್ಯಾದಿ.

$b_0 = a_0$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವುದರಲ್ಲಿ ಆಕ್ಷೇಪಣೆಯೇನೂ ಇಲ್ಲ.

$\therefore\ b_1 = ka_1,\ b_2 = k^2 a_2,\ \cdots$

$\therefore$ ಬೇಕಾದ ಸಮೀಕರಣ $a_0\, x^n + ka_1\, x^{n-1} + k^2 a_2\, x^{n-2} + \cdots$ $+ k^n a_n = 0$ (yಗೆ ಬದಲು xನ್ನೇ ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು.)

ಈ ವಿಧಾನವನ್ನು ಅತಿಸುಲಭವಾದ ಉದಾಹರಣೆಗಳಿಗೆ ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು. ಇತರ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಕಠಿಣವಾಗುತ್ತದೆ. ಇನ್ನು ಮುಂದೆ ಈ ವಿಧಾನವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವುದಿಲ್ಲ. ರೂಪಾಂತರಕರಣದ ತತ್ವವನ್ನು ತಿಳಿಸಿ ಇನ್ನುಮುಂದೆ ಈ ತತ್ವದ ಮೇಲೆ ನಿಂತಿರುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವೆವು.

Any root of (1) may be denoted by α. The meaning of calling (1) as an equution is that x admits only n values α_1, α_2, $\cdots$, α_n. Therefore we can write $x = \alpha$. If y is the root of our required equation, $y = k\alpha = kx$.

$y=kx$ gives the relation between the given equation and the equation to be obtained.

$$\therefore \; x = \frac{y}{k}.$$

Using this relation in (1),

$$a_0 \left(\frac{y}{k}\right)^n + a_1 \left(\frac{y}{k}\right)^{n-1} + a_2 \left(\frac{y}{k}\right)^{n-2} + \cdots + a_n = 0$$

$$\text{or} \quad a_0 y^n + a_1 k y^{n-1} + a_2 k^2 y^{n-2} + \ldots + a_n k^n = 0.$$

This is the required equation. We may finally write, if we like, x for y.

Corollary. Putting $k = -1$, we obtain the equation whose roots are $-\alpha_1, -\alpha_2, -\alpha_3, \cdots, -\alpha_n$, viz.

$$a_0 y^n - a_1 y^{n-1} + a_2 y^{n-2} - a_3 y^{n-3} + \cdots = 0.$$

(II) To form the equation whose roots are $\alpha_1 + k$, $\alpha_2 + k$, $\cdots$, $\alpha_n + k$.

Following the principle explained above, let any of these roots be called y.

$$\therefore \quad y = \alpha + k = x + k$$

$$\therefore \quad x = y - k.$$

Substituting this relation in (1), we obtain the required equation.

$$a_0 (y-k)^n + a_1 (y-k)^{n-1} + a_2 (y-k)^{n-2} + \cdots + a_n = 0.$$

When k is positive, this problem is sometimes spoken of as the process of increasing the roots by k. and when k is negative as that of decreasing the roots by k.

(III) To form the equation whose roots are the reciprocals of the roots of the given equation.

(1)ರ ಯಾವುದೇ ಮೂಲವನ್ನು α ಎಂದು ಕರೆಯಬಹುದು. ಸಮೀಕರಣ ಎಂಬುದರ ಅರ್ಥ, x ಗೆ $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ ಬೆಲೆಗಳು ಮಾತ್ರ ಸಲ್ಲುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $x = \alpha$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. ನಮಗೆ ಬೇಕಾದ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲವು y ಆದರೆ, $y = k\alpha = kx$ $y = kx$ ಎಂಬುದು ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೂ ನಾವು ಪಡೆಯಬೇಕಾದ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೂ ಇರುವ ಸಂಬಂಧ.

$$\therefore \quad x = \frac{y}{k}.$$

ಈ ಸಂಬಂಧವನ್ನು (1) ರಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಿಸಿದರೆ,

$$a_0\left(\frac{y}{k}\right)^n + a_1\left(\frac{y}{k}\right)^{n-1} + a_2\left(\frac{y}{k}\right)^{n-2} + \ldots + a_n = 0$$

ಅಥವಾ $a_0 y^n + a_1 k y^{n-1} + a_2 k^2 y^{n-2} + \ldots + a_n k^n = 0$.

ಇದೇ ನಾವು ಕೋರುವ ಸಮೀಕರಣ. y ಗೆ ಬದಲು x ಬೇಕಾದರೆ ಬರೆಯಬಹುದು.

ಅನುಮಿತ : $k = -1$ ಹಾಕುವುದರಿಂದ, $-\alpha_1, -\alpha_2, -\alpha_3, \cdots, -\alpha_n$ ಮೂಲಗಳಾಗಿ ಉಳ್ಳ ಸಮೀಕರಣವು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ.

$$a_0 y^n - a_1 y^{n-1} + a_2 y^{n-2} - a_3 y^{n-3} + \ldots = 0.$$

(II) $\alpha_1 + k, \alpha_2 + k, \ldots, \alpha_n + k$ ಮೂಲಗಳಾಗಿ ಉಳ್ಳ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಪಡೆಯುವಿಕೆ.

ಮೇಲಿನ ತತ್ವವನ್ನು ಅನುಸರಿಸಿ, ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಒಂದನ್ನು y ಎಂದು ಕರೆಯುವ.

$$\therefore \quad y = \alpha + k = x + k$$

$$\therefore \quad x = y - k$$

ಈ ಸಂಬಂಧವನ್ನು (1) ರಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಿಸಿದರೆ,

$$a_0 (y-k)^n + a_1 (y-k)^{n-1} + a_2 (y-k)^{n-2} + \cdots + a_n = 0$$

ಇದೇ ನಾವು ಕೋರುವ ಸಮೀಕರಣ.

k ಧನವಾಗಿದ್ದರೆ, ಈ ಪ್ರಶ್ನೆಯನ್ನು ಮೂಲಗಳನ್ನು k ಇಂದ ವರ್ಧಿಸುವಿಕೆ ಎಂದೂ, k ಋಣವಾಗಿದ್ದರೆ, k ಇಂದ ಕಡಮೆ ಮಾಡುವಿಕೆ ಎಂದೂ ಕರೆಯುವುದುಂಟು.

(III) ಮೂಲಗಳವ್ಯುತ್ಕ್ರಮಗಳನ್ನು ಮೂಲಗಳನ್ನಾಗಿ ಉಳ್ಳ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಪಡೆಯುವಿಕೆ.

We have to form the equation whose roots are,

$$\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2}, \ldots, \frac{1}{\alpha_n}.$$

$$y = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{x} \qquad \therefore x = \frac{1}{y}.$$

$$\therefore a_0\left(\frac{1}{y}\right)^n + a_1\left(\frac{1}{y}\right)^{n-1} + a_2\left(\frac{1}{y}\right)^{n-2} + \cdots + a_n = 0$$

or $\quad a_n y^n + a_{n-1} y^{n-1} + a_{n-2} y^{n-2} + \cdots + a_0 = 0$

is the required equation. This is obtained by writing down the coefficients of the given equation in the reverse order, and attaching to them y^n, y^{n-1} etc.

Example. If α, β, γ, δ are the roots of $x^4 + 4x^3 + 5x^3 - 6x - 7 = 0$, write down the value of $\Sigma \frac{1}{\alpha^2}$.

The equation whose roots are $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}, \frac{1}{\delta}$ is

$$-7x^4 - 6x^3 + 5x^2 + 4x + 1 = 0$$

or $\quad 7x^4 + 6x^3 - 5x^2 - 4x - 1 = 0.$

$$\therefore \Sigma \frac{1}{\alpha} = \frac{-6}{7}, \quad \Sigma \frac{1}{\alpha\beta} = \frac{-5}{7}$$

$$\therefore \Sigma \frac{1}{\alpha^2} = \left(\Sigma \frac{1}{\alpha}\right)^2 - 2 \cdot \Sigma \frac{1}{\alpha\beta} = \frac{36}{49} + \frac{10}{7} = \frac{106}{49}.$$

Exercises 11·1.

1. Write down the equation whose roots are three times the roots of the equation $5x^6 + 6x^4 + 6x^3 + 6x + 2 = 0$.

2. "Multiply" the roots of the equation $x^7 + x^6 + x^5 - 2x^4 - 2x - 2 = 0$ by -2 (i.e. form an equation whose roots are equal to the roots of the given equation, multiplied by -2)

ಎಂದರೆ $\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2}, \ldots, \frac{1}{\alpha_n}$ ಗಳನ್ನು ಮೂಲಗಳನ್ನಾಗಿ ಉಳ್ಳ ಸಮೀಕರಣ ವನ್ನು ಪಡೆಯುವಿಕೆ.

$$y = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{x} \quad \therefore \quad x = \frac{1}{y}$$

$$\therefore \; a_0\left(\frac{1}{y}\right)^n + a_1\left(\frac{1}{y}\right)^{n-1} + a_2\left(\frac{1}{y}\right)^{n-2} + \cdots + a_n = 0$$

ಅಥವಾ $a_n y^n + a_{n-1} y^{n-1} + a_{n-2} y^{n-2} + \cdots + a_0 = 0$ ಎಂಬುದೇ ನಾವು ಕೋರುವ ಸಮೀಕರಣ.

ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣದ ಗುಣಕಗಳನ್ನು ಬಲದಿಂದ ಎಡಕ್ಕೆ ಬರೆದು y^n, y^{n-1} ಮುಂತಾದುವುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವುದರಿಂದ ಈ ಸಮೀಕರಣ ಉಂಟಾಗುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ: $x^4 + 4x^3 + 5x^2 - 6x - 7 = 0$ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ಆದರೆ, $\Sigma \frac{1}{\alpha^2}$ ನ ಬೆಲೆಯೇನು ?

$\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}, \frac{1}{\delta}$ ಗಳನ್ನು ಮೂಲವಾಗಿ ಉಳ್ಳ ಸಮೀಕರಣ

$$-7x^4 - 6x^3 + 5x^2 + 4x + 1 = 0$$

ಅಥವಾ $7x^4 + 6x^3 - 5x^2 - 4x - 1 = 0$

$$\therefore \; \Sigma \frac{1}{\alpha} = -\frac{6}{7}, \; \Sigma \frac{1}{\alpha\beta} = -\frac{5}{7}.$$

$$\therefore \; \Sigma \frac{1}{\alpha^2} = \left(\Sigma \frac{1}{\alpha}\right)^2 - 2\,\Sigma \frac{1}{\alpha\beta} = \frac{36}{49} + \frac{10}{7} = \frac{106}{49}$$

ಅಭ್ಯಾಸ 11.1

1. $5x^6 + 6x^4 + 6x^3 + 6x + 2 = 0$ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳ ಮೂರರಷ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಮೂಲಗಳನ್ನಾಗಿ ಇರುವ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

2. $x^7 + x^6 + x^5 - 2x^4 - 2x - 2 = 0$ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳನ್ನು -2 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ (ಎಂದರೆ -2 ರಷ್ಟು ಆಗುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಮೂಲಗಳಾಗಿ ಉಳ್ಳ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.)

3. Increase the roots of the equation $3x^3 + 2x^2 - 2x - 4 = 0$ by 1.

4. Diminish the roots of $x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 5 = 0$ by 2.

5. If $\alpha_1, \cdots, \alpha_5$ are the roots of $x^5 + 6x^4 - 7x^3 - 7x + 5 = 0$, evaluate $\Sigma \frac{1}{\alpha^2}$.

6. Solve the equation $28x^3 - 39x^2 + 12x - 1 = 0$, given that the roots are in harmonic progression.

[By (III), the roots of $x^3 - 12x^2 + 39x - 28 = 0$ are in A.P. Now, solve this by the method of Ex. (5), 10·2.].

7. Determine the relation that should exist between p, q and r in order that the roots of $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ be in H.P. (See, Ex. (6), 10·2)

11·2. *Miscellaneous Examples.* Let α, β, γ be the roots of the equation $x^3 + px^2 + qx + r = 0$.

(1) Construct the equation whose roots are $\beta + \gamma, \gamma + \alpha, \alpha + \beta$.

$y = \beta + \gamma = (\alpha + \beta + \gamma) - \alpha \qquad \therefore y = -p - x$

$\therefore x = -(p + y)$.

The required equation is $-(p+y)^3 + p(p + y)^2 - q(p + y) + r = 0$.

(2) Find the values of $\Sigma (2\alpha - \beta - \gamma)(2\beta - \gamma - \alpha)$ and $(2\alpha - \beta - \gamma)(2\beta - \gamma - \alpha)(2\gamma - \alpha - \beta)$.

Let us first construct the equation whose roots are $2\alpha - \beta - \gamma$, $2\beta - \gamma - \alpha$, $2\gamma - \alpha - \beta$.

3. $3x^3 + 2x^2 - 2x - 4 = 0$ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳನ್ನು 1 ರಿಂದ ವರ್ಧಿಸಿ,

4. $x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 5 = 0$ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳನ್ನು 2 ರಿಂದ ಕಡಮೆ ಮಾಡಿ,

5. $x^5 + 6x^4 - 7x^3 - 7x + 5 = 0$ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು

$\alpha_1, \dots, \alpha_5$ ಆದರೆ, $\Sigma\frac{1}{\alpha^2}$ ಬೆಲೆ ಎಷ್ಟು ?

6. $28x^3 - 39x^2 + 12x - 1 = 0$ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು ಹರಾತ್ಮಕ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿವೆ. ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ.

[(III) ರಿಂದ, $x^3 - 12x^2 + 39x - 28 = 0$ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿವೆ. ಈಗ 10.2, ಉದಾ: (5)ರ ವಿಧಾನವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ.]

7. $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು ಹರಾತ್ಮಕ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿರಲು, p, q, r ಗಳ ನಡುವೆ ಯಾವ ಸಂಬಂಧವಿರಬೇಕು ?

[10.2. ಉದಾ: (6) ನ್ನು ನೋಡಿ.]

11.2 ಮಿಶ್ರೋದಾಹರಣೆಗಳು. $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು α, β, γ ಆಗಿರಲಿ.

(1) $\beta+\gamma, \gamma+\alpha, \alpha+\beta$ ಮೂಲಗಳಾಗಿ ಉಳ್ಳ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ರಚಿಸಿ.

$y = \beta+\gamma = (\alpha+\beta+\gamma) - \alpha \quad \therefore y = -p - x$

$\therefore x = -(p+y)$.

ಬೇಕಾದ ಸಮೀಕರಣ. $-(p+y)^3 + p(p+y)^2 - q(p+y) + r = 0$

(2) $\Sigma(2\alpha-\beta-\gamma)(2\beta-\gamma-\alpha)$ ಮತ್ತು $(2\alpha-\beta-\gamma)(2\beta-\gamma-\alpha)(2\gamma-\alpha-\beta)$ ಇವುಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಿರಿ.

$2\alpha-\beta-\gamma,\ 2\beta-\gamma-\alpha,\ 2\gamma-\alpha-\beta$ ಗಳನ್ನು ಮೂಲಗಳನ್ನಾಗಿ ಉಳ್ಳ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ರಚಿಸೋಣ.

$y = 2\alpha - \beta - \gamma = 3\alpha - (\alpha + \beta + \gamma)$

$\therefore y = 3x + p \quad \therefore x = \frac{1}{3}(y - p)$

$\therefore \frac{1}{27}(y-p)^3 + \frac{p}{9}(y-p)^2 + \frac{q}{3}(y-p) + r = 0$ is the required equation or $(y-p)^3 + 3p(y-p)^2 + 9q(y-p) + 27r = 0$

or $y^3 + y(9q - 3p^2) + (2p^3 - 9pq + 27r) = 0$

$\therefore \Sigma(2\alpha - \beta - \gamma)(2\beta - \gamma - \alpha) = 9q - 3p^2$

$(2\alpha - \beta - \gamma)(2\beta - \gamma - \alpha)(2\gamma - \alpha - \beta) = -2p^3 + 9pq - 27r.$

(3) Construct the equation whose roots are $\beta^2 + \gamma^2$, $\gamma^2 + \alpha^2$, $\alpha^2 + \beta^2$.

$y = (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - \alpha^2 = (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2\Sigma\alpha\beta - \alpha^2$

$\therefore y = (p^2 - 2q) - x^2$

We eliminate x between this and the given equation.

Multiply the second by x

$x^3 - (p^2 - 2q - y)x = 0$

$\therefore x^3 + p(p^2 - 2q - y) + qx + r = 0.$

$\therefore -(p^2 - q - y)x = p(p^2 - 2q - y) - r$

$\therefore x = \frac{p(p^2 - 2q - y) - r}{y + q - p^2}$

Substitute this value of x in the given equation

(4) Form the equation whose roots are squares of the roots of the given equation.

Required to form the equation whose roots are α^2, β^2, γ^2.

Eliminate x between the given equation and $y = x^2$

$x(y + q) = -(py + r) \qquad \therefore x = -\left(\frac{py + r}{y + q}\right)$

Substitute this in the given equation.

(5) Form the equation whose roots are

$$\frac{\alpha}{\beta + \gamma - \alpha}, \quad \frac{\beta}{\gamma + \alpha - \beta}, \quad \frac{\gamma}{\alpha + \beta - \gamma}$$

$y = \frac{\alpha}{(\beta + \gamma + \alpha) - 2\alpha} \quad \therefore y = \frac{x}{-p - 2x} \quad \therefore x = -\frac{py}{1 + 2y}.$

Substitute in the given equation.

$y = 2\alpha - \beta - \gamma = 3\alpha - (\alpha + \beta + \gamma)$

$\therefore\ y = 3x + p \qquad \therefore\ x = \frac{1}{3}(y - p)$

$\therefore \frac{1}{27}(y-p)^3 + \frac{p}{9}(y-p)^2 + \frac{q}{3}(y-p) + r = 0$ ಬೇಕಾದ ಸಮೀಕರಣ

ಅಥವಾ $(y-p)^3 + 3p\ (y-p)^2 + 9q\ (y-p) + 27r = 0$

ಅಥವಾ $y^3 + y(9q - 3p^2) + (2p^3 - 9pq + 27r) = 0$

$\therefore\ \Sigma(2\alpha - \beta - \gamma)(2\beta - \gamma - \alpha) = 9q - 3p^2$

$(2\alpha - \beta - \gamma)(2\beta - \gamma - \alpha)(2\gamma - \alpha - \beta) = -2p^3 + 9pq - 27r.$

(3) $\beta^2 + \gamma^2,\ \gamma^2 + \alpha^2,\ \alpha^2 + \beta^2$ ಗಳನ್ನು ಮೂಲವಾಗಿಉಳ್ಳ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

$y = (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - \alpha^2 = (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2\ \Sigma\alpha\beta - \alpha^2$

$\therefore\ y = (p^2 - 2q) - x^2$

ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೂ ಇದಕ್ಕೂ ನಡುವೆ xನ್ನು ವಿಸರ್ಜಿಸಿ. ಎರಡನೆಯದನ್ನು x ಇಂದ ಗುಣಿಸಿ,

$$x^3 - (p^2 - 2q - y)\ x = 0$$

$$\therefore\ x^3 + p\ (p^2 - 2q - y) + qx + r = 0$$

$-(p^2 - q - y)\ x = p\ (p^2 - 2q - y) - r$

$\therefore\ x = \left\{ p\ (p^2 - 2q - y) - r \right\} / (y + q - p^2)$

ಈ ಬೆಲೆಯನ್ನು ದತ್ತಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿ.

(4) ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳ ವರ್ಗಗಳನ್ನು ಮೂಲಗಳಾಗಿ ಉಳ್ಳ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಪಡೆಯಿರಿ.

$\alpha^2, \beta^2, \gamma^2$ ಗಳನ್ನು ಮೂಲಗಳಾಗಿ ಉಳ್ಳ ಸಮೀಕರಣ ಬೇಕಾಗಿದೆ. ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೂ $y = x^2$ ಗೂ ನಡುವೆ x ನ್ನು ವಿಸರ್ಜಿಸಿ.

$$x\ (y + q) = -(py + r) \quad \therefore\ x = -\left(\frac{py + r}{y + q}\right)$$

ಇದನ್ನು ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿ.

(5) $\frac{\alpha}{\beta + \gamma - \alpha},\ \frac{\beta}{\gamma + \alpha - \beta},\ \frac{\gamma}{\alpha + \beta - \gamma}$ ಗಳನ್ನು ಮೂಲಗಳಾಗಿ ಉಳ್ಳ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಪಡೆಯಿರಿ.

$y = \frac{\alpha}{(\beta + \gamma + \alpha) - 2\alpha} \quad \therefore\ y = \frac{x}{-p - 2x} \quad \therefore\ x = -\frac{py}{1 + 2y}$

ಇದನ್ನು ಆದೇಶಿಸಿ.

Exercises 11·2.

1. If the roots of $x^4 + 8x^3 - 2x^2 - x + 3 = 0$ be $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, form the equation whose roots are $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2, \delta^2$.

   Hence obtain the values of $\Sigma \alpha^2 \beta^2$ and $\Sigma \alpha^2 \beta^2 \gamma^2$.

2. If the roots of $x^3 + ax^2 + bx + ab = 0$ be α, β, γ show that the roots of $x^3 + a^3 x^2 + b^3 x + a^3 b^3 = 0$ are $\alpha^3, \beta^3, \gamma^3$.

3. α, β, γ are the roots of the equation $x^3 + px^2 + qx + r = 0$.

   Form the equation whose roots are

   (i) $\alpha(\beta+\gamma), \ \beta(\gamma+\alpha), \ \gamma(\alpha+\beta)$.

   (ii) $\beta\gamma - \alpha^2, \ \gamma\alpha - \beta^2, \ \alpha\beta - \gamma^2$

   [Hint: write $\beta\gamma - \alpha^2 = (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) - \alpha(\alpha + \beta + \gamma) = q + p\alpha$.]

   (iii) $\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2, \ \gamma^2 + \alpha^2 - \beta^2, \ \alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2$.

4. α, β, γ are the roots of the equation $x^3 + qx + r = 0$.

   Form the equation whose roots are

   (i) $\dfrac{\beta+\gamma}{\alpha^2}, \ \dfrac{\gamma+\alpha}{\beta^2}, \ \dfrac{\alpha+\beta}{\gamma^2}$

   (ii) $\dfrac{\beta}{\gamma} + \dfrac{\gamma}{\beta}, \ \dfrac{\gamma}{\alpha} + \dfrac{\alpha}{\gamma}, \ \dfrac{\alpha}{\beta} + \dfrac{\beta}{\alpha}$.

5. Increase the roots of the equation $x^3 + 6x^2 - 10x + 5 = 0$ by h and determine the value of h so that the resulting equation has no second term (i.e. the term in x^2)

6. Following the method of the previous problem, remove the second term from the equation $x^3 - 12x^2 + 48x - 72 = 0$. Hence solve the equation.

ಅಭ್ಯಾಸ 11.2

1. $x^4+8x^3-2x^2-x+3=0$ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ಆದರೆ, α^2, β^2, γ^2, δ^2 ಗಳನ್ನು ಮೂಲಗಳಾಗಿ ಉಳ್ಳ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಪಡೆಯಿರಿ. ಈ ರೀತಿ $\Sigma \alpha^2 \beta^2$ ಮತ್ತು $\Sigma \alpha^2 \beta^2 \gamma^2$ ಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಿರಿ.

2. $x^3+ax^2+bx+ab=0$ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು α, β, γ ಆದರೆ, $x^3+a^3x^2+b^3x+a^3b^3=0$ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು $\alpha^3, \beta^3, \gamma^3$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

3. $x^3+px^2+qx+r=0$ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು α, β, γ.

(i) $\alpha(\beta+\gamma), \beta(\gamma+\alpha), \gamma(\alpha+\beta)$.

(ii) $\beta\gamma-\alpha^2, \gamma\alpha-\beta^2, \alpha\beta-\gamma^2$

[ಸೂಚನೆ, $\beta\gamma-\alpha^2=(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-\alpha(\alpha+\beta+\gamma)=q+p\alpha$ ಎಂದು ಬರೆಯಿರಿ.]

(iii) $\beta^2+\gamma^2-\alpha^2, \gamma^2+\alpha^2-\beta^2, \alpha^2+\beta^2-\gamma^2$.

ಇವುಗಳನ್ನು ಮೂಲಗಳಾಗಿ ಉಳ್ಳ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಿರಿ.

4. $x^3+qx+r=0$ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು α, β, γ.

(i) $\frac{\beta+\gamma}{\alpha^2}, \frac{\gamma+\alpha}{\beta^2}, \frac{\alpha+\beta}{\gamma^2}$

(ii) $\frac{\beta}{\gamma}+\frac{\gamma}{\beta}, \frac{\gamma}{\alpha}+\frac{\alpha}{\gamma}, \frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}$

ಇವನ್ನು ಮೂಲಗಳಾಗಿ ಉಳ್ಳ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಿರಿ.

5. $x^3+6x^2-10x+5=0$ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳನ್ನು h ನಿಂದ ವರ್ಧಿಸಿ, ಬರುವ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಎರಡನೆಯ ಪದ (x^2 ಪದ) ಇಲ್ಲದಿರುವಂತೆ h ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಪಡೆಯಿರಿ.

6. ಹಿಂದಿನ ಉದಾಹರಣೆಯ ರೀತಿಯಿಂದ, $x^3-12x^2+48x-72=0$ ಸಮೀಕರಣದಿಂದ ಎರಡನೆಯ ಪದವನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ. ಈ ಉಪಾಯದಿಂದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿರಿ.

7. If $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ are the roots of the equation

$x^4 + 2x^3 - 5x^2 + 3x + 5 = 0$, find the value of

$(\alpha^2 + 1)(\beta^2 + 1)(\gamma^2 + 1)(\delta^2 + 1)$.

[$x^4 + 2x^3 - 5x^2 + 3x + 5 \equiv (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)$.

Put $x = i$. $1 - 2i + 5 + 3i + 5 = (i-\alpha)(i-\beta)(i-\gamma)(i-\delta)$

or $11 + i =$ " "

Put $x = -i$ $11 - i = (-i-\alpha)(-i-\beta)(-i-\gamma)(-i-\delta)$

Multiply the two. $11^2 + 1 = (\alpha^2+1)(\beta^2+1)(\gamma^2+1)(\delta^2+1)$.

8. For the above equation, find the value of $(\alpha^2+2)(\beta^2+2)(\gamma^2+2)(\delta^2+2)$.

11·3. *Reciprocal Equations.* An equation is said to be a reciprocal equation, if whenever α is a root, $1/\alpha$ is also a root (the same root or a different root). For example, if the roots of an equation are $1, -1, 2, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{3}$, the reciprocals of these numbers give the same set.

If $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ are the roots of a reciprocal equation, then $1/\alpha_1, 1/\alpha_2, \cdots, 1/\alpha_n$ give the same roots in some other order.

$\therefore$ The two equations

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n = 0$$

and $$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_0 = 0$$

should be identical.

$$\therefore \frac{a_0}{a_n} = \frac{a_1}{a_{n-1}} = \frac{a_2}{a_{n-2}} = \dots = \frac{a_n}{a_0}.$$

$$\therefore \quad a_n^2 = a_0^2.$$

Two cases arise: (i) $a_n = a_0$ (ii) $a_n = -a_0$.

(i) When $a_n = a_0$, we have the *first type* of reciprocal equation. Here $a_0 = a_n$, $a_1 = a_{n-1}$, $a_2 = a_{n-2}$, ... i.e. the coefficients from either end are equal.

(ii) When $a_n = -a_0$, we get the *second type* of reciprocal equation.

Here $a_0 = -a_n$, $a_1 = -a_{n-1}$, $a_2 = -a_{n-2}$ ...

7. $x^4+2x^3-5x^2+3x+5=0$ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ಆದರೆ $(\alpha^2+1)(\beta^2+1)(\gamma^2+1)(\delta^2+1)$ ಎಂಬುದರ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಪಡೆಯಿರಿ.

[$x^4+2x^3-5x^2+3x+5 \equiv (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)$.

$x=-i$ ಹಾಕಿ. $1-2i+5+3i+5=(i-\alpha)(i-\beta)(i-\gamma)(i-\delta)$

ಅಥವಾ $11+i =$,,

$x=-i$ ಹಾಕಿ. $11-i = (-i-\alpha)(-i-\beta)(-i-\gamma)(-i-\delta)$

ಎರಡನ್ನೂ ಗುಣಿಸಿದರೆ, $11^2+1=(\alpha^2+1)(\beta^2+1)(\gamma^2+1)(\delta^2+1)$

8. ಮೇಲಣ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ $(\alpha^2+2)(\beta^2+2)(\gamma^2+2)(\delta^2+2)$ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಪಡೆಯಿರಿ.

11. 3 **ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮ ಸಮೀಕರಣಗಳು.** α ಎಂಬುದು ಒಂದು ಸಮೀಕರಣದ ಯಾವುದೇ ಮೂಲವಾಗಿದ್ದು, $\frac{1}{\alpha}$ ಸಹ ಒಂದು ಮೂಲ (ಅದೇ ಮೂಲ ಅಥವಾ ಬೇರೆ ಮೂಲ) ವಾಗಿದ್ದರೆ. ಅಂಥ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮ ಸಮೀಕರಣ ಎಂದು ಹೆಸರು. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ ಒಂದು ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು 1, —1, 2, $\frac{1}{2}$, 3, $\frac{1}{3}$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಈ ಸಂಖ್ಯಾಗಣದ ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮಗಳು ಅದೇ ಗಣವನ್ನೇ ಕೊಡುತ್ತವೆ.

ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮಸಮೀಕರಣವೊಂದರ ಮೂಲಗಳು $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ ಆದರೆ, $\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2}, \ldots, \frac{1}{\alpha_n}$ ಇದೇ ಮೂಲಗಳನ್ನೇ ಬೇರೊಂದು ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಕೊಡುತ್ತವೆ.

$\therefore\ a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_n=0$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣವೂ

$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\ldots+a_0=0$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣವೂ ಒಂದೇ ಆಗಿರಬೇಕು.

$$\therefore\ \frac{a_0}{a_n}=\frac{a_1}{a_{n-1}}=\frac{a_2}{a_{n-2}}=\ldots=\frac{a_n}{a_0}$$

$a_n^2=a_0^2$.

ಎರಡು ಸಂದರ್ಭಗಳು ಒದಗುತ್ತವೆ. (i) $a_n=a_0$ (ii) $a_n=-a_0$.
(i) $a_n=a_0$ ಆದಾಗ ಮೊದಲನೆಯ ರೂಪದ ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮ ಸಮೀಕರಣ ಒದಗುತ್ತದೆ. ಇದರಲ್ಲಿ $a_0=a_n$, $a_1=a_{n-1}$, $a_2=a_{n-2}$, ... ಗುಣಕಗಳು ಎಡದಿಂದಲೂ ಬಲದಿಂದಲೂ ಒಂದೇ ಆಗುತ್ತವೆ. (ii) $a_n=-a_o$ ಆದಾಗ ಎರಡನೆಯ ರೂಪದ ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮಸಮೀಕರಣ ಒದಗುತ್ತದೆ. ಇದರಲ್ಲಿ $a_0=-a_n$, $a_1=-a_{n-2}$, $a_2=-a_{n-2}$, ...

A reciprocal equation of the $2n$th degree can be reduced to a reciprocal equation of the nth degree, as will be indicated by the examples below. Hence, a reciprocal equation of the 4th degree can be easily solved.

Examples :

(1) Solve the equation $6x^5-29x^4+27x^3+27x^2-29x+6=0$.

This is a reciprocal equation of the first type, of degree 5, i.e., of odd degree. $x=-1$ is a root. Dividing by $x+1$, we obtain $6x^4-35x^3+62x^2-35x+6=0$, which is an equation of the same type, of degree 4. Dividing by x^2,

we write this as, $6\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-35\left(x+\frac{1}{x}\right)+62=0$.

If $x+\frac{1}{x}=y$, then $x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$.

$\therefore\ 6(y^2-2)-35y+62=0$ or $6y^2-35y+50=0$.

$\therefore\ (2y-5)(3y-10)=0\ \therefore\ x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2}$ or $x+\frac{1}{x}=\frac{10}{3}$

$\therefore\ x=2,\ \frac{1}{2}$, or $3,\ \frac{1}{3}$.

The roots of the given equation are $1, 2, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{3}$.

(2) $x^5+4x^4+x^3-x^2-4x-1=0$.

This is an equation of odd degree, of the second type.

$x=1$ is a root. Dividing by $x-1$, we get

$x^4+5x^3+6x^2+5x+1=0$ This can be solved as before.

ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮ ಸಮೀಕರಣವು $2n$ ಪ್ರಮಾಣದ್ದಾದರೆ, ಅದನ್ನು n ಪ್ರಮಾಣದ ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಇಳಿಸಬಹುದು. ಮುಂದಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳಿಂದ, ಇದು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ 4ನೆಯ ಪ್ರಮಾಣದ ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಸುಲಭವಾಗಿ ಬಿಡಿಸಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು :

(1) $6x^5 - 29x^4 + 27x^3 + 27x^2 - 29x + 6 = 0$. ಈ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ.

ಇದು 5ನೆಯ ಪ್ರಮಾಣದ, ಎಂದರೆ ವಿಷಮಪ್ರಮಾಣದ, ಮೊದಲನೆಯ ರೂಪದ ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮ ಸಮೀಕರಣ. $x = -1$ ಎಂಬುದು ಒಂದು ಮೂಲ, $x+1$ ಇಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ,

$$6x^4 - 35x^3 + 62x^2 - 35x + 6 = 0$$

ಎಂಬ 4ನೆಯ ಪ್ರಮಾಣದ, ಅದೇ ರೂಪದ ಸಮೀಕರಣ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನು x^2 ಇಂದ ಭಾಗಿಸಿ,

$$6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 35\left(x + \frac{1}{x}\right) + 62 = 0$$

ಎಂದು ಬರೆಯುವೆವು.

ಈಗ $x + \frac{1}{x} = y$ ಆದರೆ, $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$

$\therefore \quad 6(y^2 - 2) - 35y + 62 = 0$ ಅಥವಾ $6y^2 - 35y + 50 = 0$

$\therefore \quad (2y-5)(3y-10) = 0 \quad \therefore \quad x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}$ ಅಥವಾ $x + \frac{1}{x} = \frac{10}{3}$

$\therefore \quad x = 2, \frac{1}{2}$ ಅಥವಾ $3, \frac{1}{3}$.

ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು $1, 2, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{3}$.

(2) $x^5 + 4x^4 + x^3 - x^2 - 4x - 1 = 0$ ಇದು ಎರಡನೆಯ ರೂಪದ ವಿಷಮ ಪ್ರಮಾಣದ ಸಮೀಕರಣ. $x = 1$ ಒಂದು ಮೂಲ. $x-1$ ಇಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ,

$x^4 + 5x^3 + 6x^2 + 5x + 1 = 0$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣ ಬರುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನು ಮೇಲಿನಂತೆಯೇ ಬಿಡಿಸಬೇಕು.

$$y=x+\frac{1}{x}=-1 \text{ or } -4 \quad \therefore\ x^2+x+1=0 \text{ or } x^2+4x+1=0.$$

The roots of the given equation are 1, $\dfrac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$, $2\pm\sqrt{3}$.

(3) $2x^6-11x^5+17x^4-17x^2+11x-2=0.$

This is an equation of the second type, of even degree. The coefficients from either end should be equal, but opposite in sign. Hence the middle term is absent i.e., there is no term in x^3.

Such an equation has $x=1$, $x=-1$ both as roots.

Hence x^2-1 is a factor. Dividing by this, we get

$$2x^4-11x^3+19x^2-11x+2=0.$$

This is a reciprocal equation of the first type of even degree. This can be solved as before. We obtain

$$y=x+\frac{1}{x}=\tfrac{5}{2} \text{ or } 3.$$

Hence the roots of the given equation are 1, —1, 2, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}(3\pm\sqrt{5})$

Exercise 11·3.

Solve the following reciprocal equations:

1. $x^5-1=0$
2. $x^5+1=0$
3. $x^6-1=0$
4. $x^4-2x^3-6x^2-2x+1=0$
5. $x^4-2x^3+3x^2-2x+1=0$
6. $x^4-5x^3+5x-1=0$
7. $x^5-x^4-x^3-x^2-x+1=0$
8. $x^6+4x^5+4x^4-4x^2-4x-1=0$
9. $6x^5-11x^4-33x^3+33x^2+11x-6=0.$

$y=x+\frac{1}{x}=-1$ ಅಥವಾ -4. ಆದ್ದರಿಂದ $x^2+x+1=0$ ಅಥವಾ $x^2+4x+1=0$.

ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು $1, \frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}, 2\pm\sqrt{3}$.

(3) $2x^6-11x^5+17x^4-17x^2+11x-2=0$.
ಇದು ಸಮಪ್ರಮಾಣದ ಎರಡನೆಯ ರೂಪದ ಸಮೀಕರಣ. ಗುಣಕಗಳು ಎಡಬಲದಿಂದ ಬೆಲೆಯಲ್ಲಿ ಒಂದೇ, ಚಿಹ್ನೆಯಲ್ಲಿ ವ್ಯತ್ಯಾಸವಾಗಿರಬೇಕು. ಆದ್ದರಿಂದ, ನಡುವಣ ಪದವಿಲ್ಲ, ಎಂದರೆ x^3 ಪದವಿಲ್ಲ.

ಇಂಥ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ, $x=1$, $x=-1$ ಎರಡೂ ಮೂಲಗಳು. ಆದ್ದರಿಂದ x^2-1 ಅಪವರ್ತನ. ಇದರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ, $2x^4-11x^3+19x^2-11x+2=0$ ಎಂಬ ಸಮಪ್ರಮಾಣದ ಮೊದಲನೆಯ ರೂಪದ ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮ ಸಮೀಕರಣ ಬರುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನು ಹಿಂದಿನಂತೆಯೇ ಬಿಡಿಸಬೇಕು.

$y=x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2}$ ಅಥವಾ 3

ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು $1, -1, 2, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}(3\pm\sqrt{5})$.

ಅಭ್ಯಾಸ 11.3

ಕೆಳಗಿನ ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ :—

1. $x^5-1=0$
2. $x^5+1=0$
3. $x^6-1=0$
4. $x^4-2x^3-6x^2-2x+1=0$
5. $x^4-2x^3+3x^2-2x+1=0$
6. $x^4-5x^3+5x-1=0$
7. $x^5-x^4-x^3-x^2-x+1=0$
8. $x^6+4x^5+4x^4-4x^2-4x-1=0$
9. $6x^5-11x^4-33x^3+33x^2+11x-6=0$

CHAPTER 12

Theory of Equations (3). The cubic and quartic equations

12·1. Any quadratic equation can be solved by algebraic methods, and the roots involve algebraic expressions only. The student is well aware of these facts. He is also aware that the solution of quadratic equations arises very frequently in mathematics as well as in other sciences. The state of affairs is different in regard to equations of degree higher than two. To solve equations of degree higher than four, one has to go outside the field of algebra. That it is not possible to solve any polynomial equation by algebraic expressions only is a theorem which has been proved. However, when the degree is three or four, solution is possible in all cases in terms of algebraic expressions only. These solutions may not be of great use, but will be briefly studied here as problems of feat.

12·2. *The cube roots of unity.* If x is a cube root of 1, $x^3=1$. This being an equation of the third degree, gives three values for x. Since $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$, the roots are

$$1, \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}. \text{ If we write } \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}=\omega,$$

$$\text{then } \omega^2 = \frac{1-2i\sqrt{3}-3}{4}=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}.$$

Hence we can denote the roots by 1, ω, ω^2. ω and ω^2 are curious numbers, for each is the square of the other.

For $(\omega^2)^2 = \omega^4 = \omega^3 \cdot \omega = \omega$.

ಅಧ್ಯಾಯ 12.

ಸಮೀಕರಣ ಸಿದ್ಧಾಂತ (3)

ಘನಸಮೀಕರಣ, ಚತುಷ್ಘಾತ ಸಮೀಕರಣ

12.1. ಯಾವುದೇ ವರ್ಗಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬೀಜಗಣಿತ ವಿಧಾನದಿಂದ ಬಿಡಿಸಲು ಸಾಧ್ಯ, ಮತ್ತು ಮೂಲಗಳು ಬೀಜೀಯ ಉಕ್ತಿಗಳನ್ನೇ ಒಳಗೊಳ್ಳುತ್ತದೆ ಎಂಬ ವಿಚಾರಗಳನ್ನು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯು ಅರಿತಿರುವನು. ವರ್ಗಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸುವ ಕಾರ್ಯವು ಗಣಿತದಲ್ಲೂ ಇತರ ಶಾಸ್ತ್ರಗಳಲ್ಲಿಯೂ ಅತ್ಯಗತ್ಯವಾಗಿ ಪದೇ ಪದೇ ಒದಗಿಬರುತ್ತದೆ. ಎಂಬ ವಿಚಾರವನ್ನೂ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯು ಮನಗಂಡಿರುವನು. ಎರಡಕ್ಕಿಂತಲೂ ಅಧಿಕ ಪ್ರಮಾಣದ ಸಮೀಕರಣಗಳ ವಿಷಯ ಹೀಗಿಲ್ಲ. ನಾಲ್ಕಕ್ಕಿಂತ ಅಧಿಕ ಪ್ರಮಾಣದ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಬೇಕಾದರೆ, ಬೀಜಗಣಿತದ ಹೊರಗೆ ಕಾಲಿಡಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಬೀಜೀಯ ಉಕ್ತಿಗಳಿಂದಲೇ ಎಲ್ಲಾ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲೂ ಬಿಡಿಸಲು ಆಗುವುದಿಲ್ಲ ಎಂಬುದೇ ಒಂದು ಪ್ರಮೇಯ, ಇದನ್ನು ಸಾಧಿಸಲಾಗಿದೆ. ಮೂರನೆಯ ನಾಲ್ಕನೆಯ ಪ್ರಮಾಣದ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಎಲ್ಲಾ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲೂ ಬೀಜೀಯ ಉಕ್ತಿಗಳಿಂದ ಬಿಡಿಸಲು ಸಾಧ್ಯ. ಇದರ ಉಪಯೋಗ ಹೆಚ್ಚೆಂದು ಹೇಳಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ, ಒಂದು ಸಾಹಸಕಾರ್ಯ ಎಂಬ ದೃಷ್ಟಿಯಿಂದಲೇ ಇದನ್ನು ಅಭ್ಯಸಿಸುವವು.

12.2. ಒಂದರ ಘನಮೂಲಗಳು. ಮೊದಲು 1ರ ಘನಮೂಲಗಳನ್ನು ವಿಚಾರಿಸುವ. 1ರ ಘನಮೂಲ x ಆದರೆ, $x^3 = 1$. ಈ ಸಮೀಕರಣವು ಮೂರನೆಯ ಪ್ರಮಾಣದುದಾದ್ದರಿಂದ, ಇದಕ್ಕೆ ಮೂರು ಮೂಲಗಳಿರುತ್ತವೆ. $x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$ ಆದ್ದರಿಂದ, ಈ ಮೂಲಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ

$1, \quad \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \quad \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$. $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2} = \omega$ ಎಂದು ಬರೆದರೆ,

$$\omega^2 = \frac{1-2i\sqrt{3}-3}{4} = \frac{1-i-\sqrt{3}}{2}$$

ಆದ್ದರಿಂದ. ಮೂಲಗಳನ್ನು $1, \omega, \omega^2$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ω, ω^2 ಎಂಬಿವು ವಿಚಿತ್ರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು. ಒಂದು ಇನ್ನೊಂದರ ವರ್ಗ, ಹೇಗೆಂದರೆ $(\omega^2)^2 = \omega^4 = \omega^3 . \omega = \omega$.

This can be done in a simpler way by the use of trigonometry. Now $1=\cos 2\pi+i\sin 2\pi$. Hence, the three values of $1^{\frac{1}{3}}$ are $\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$, $\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}$, $\cos\frac{6\pi}{3}+i\sin\frac{6\pi}{3}$. Of these, the last$=\cos 2\pi+i\sin 2\pi=1$.

If we call the first as ω, by De Moivre's Theorem, $\omega^2=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}$. Hence the three values of $1^{\frac{1}{3}}$ are, $1, \omega, \omega^2$.

The three cube roots of any positive number N are $N^{\frac{1}{3}}$, $\omega N^{\frac{1}{3}}$, $\omega^2\cdot N^{\frac{1}{3}}$. $N^{\frac{1}{3}}$ here is its arithmetical value, a real number. The other two are complex numbers.

Since $1, \omega, \omega^2$ are the roots of the equation $x^3=1$, we have
$1+\omega+\omega^2=0$.

Verify the following factorizations :

$$x^3+y^3=(x+y)(x+\omega y)(x+\omega^2 y)$$

$$x^3-y^3=(x-y)(x-\omega y)(x-\omega^2 y)$$

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a+\omega b+\omega^2 c)(a+\omega^2 b+\omega c).$$

12·3. *The cubic equation* $a_0x^3+3a_1x^2+3a_2x+a_3=0$
Let α, β, γ denote its roots. (1)

Substitute $x=y+h$ i.e. deminish the roots by h.
[See 11·1 (II)].

$$\therefore a_0(y+h)^3+3a_1(y+h)^2+3a_2(y+h)+a_3=0$$

or $$a_0y^3+3(a_0h+a_1)y^2+3(a_0h^2+2a_1h+a_2)y$$
$$+(a_0h^3+3a_1h^2+3a_2h+a_3)=0.$$

ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಪರಿಚಯವಿರುವವರು ಈ ವಿಚಾರವನ್ನು ಇನ್ನೂ ಸುಲಭವಾಗಿ ತಿಳಿಯಬಹುದು. $1 = \cos 2\pi + i \sin 2\pi$. ಆದ್ದರಿಂದ $1^{\frac{1}{3}}$ ರ ಮೂರು ಬೆಲೆಗಳು $\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$, $\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}$, $\cos\frac{6\pi}{3} + i\sin\frac{6\pi}{3}$. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಮೂರನೆಯದು $= \cos 2\pi + i\sin 2\pi = 1$.

ಮೊದಲನೆಯದನ್ನು ω ಎಂದು ಕರೆದರೆ, ಡಿಮಾವ್ರನ ಪ್ರಮೇಯದಂತೆ, $\omega^2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}$. ಆದ್ದರಿಂದ, $1^{\frac{1}{3}}$ ರ ಮೂರು ಬೆಲೆಗಳು 1, ω, ω^2.

ಇನ್ನು ಯಾವುದೇ ಧನಸಂಖ್ಯೆ Nನ ಮೂರು ಘನ ಮೂಲಗಳು $N^{\frac{1}{3}}$, $\omega \cdot N^{\frac{1}{3}}$, $\omega^2 \cdot N^{\frac{1}{3}}$, ಇಲ್ಲಿ $N^{\frac{1}{3}}$ ಅಂಕಗಣಿತೀಯಬೆಲೆ, ವಾಸ್ತವಸಂಖ್ಯೆ. ಉಳಿದುವೆರಡೂ ಮಿಶ್ರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು.

$1, \omega, \omega^2$ ಎಂಬಿವು $x^3 - 1 = 0$ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳಾದ್ದರಿಂದ, $1 + \omega + \omega^2 = 0$.

ಕೆಳಗಿನ ಅಪವರ್ತನ ಕ್ರಿಯೆಗಳನ್ನು ಸರಿನೋಡಿ :

$$x^3 + y^3 = (x+y)(x+\omega y)(x+\omega^2 y)$$
$$x^3 - y^3 = (x-y)(x-\omega y)(x-\omega^2 y)$$
$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a+\omega b+\omega^2 c)(a+\omega^2 b+\omega c).$$

12.3. **ಘನಸಮೀಕರಣ.** $a_0x^3+3a_1x^2+3a_2x+a_3 = 0$ (1) ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳನ್ನು α, β, γ ಎಂದು ಕರೆಯೋಣ.

$x = y + h$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸೋಣ, ಎಂದರೆ ಮೂಲಗಳನ್ನು h ಇಂದ ಕಡಮೆ ಮಾಡೋಣ. [11.1, (II) ನೋಡಿ.]

$$\therefore \quad a_0(y+h)^3 + 3a_1(y+h)^2 + 3a_2(y+h) + a_3 = 0$$

ಅಥವಾ $a_0y^3 + 3(a_0h+a_1)y^2 + 3(a_0h^2+2a_1h+a_2)y + (a_0h^3 + 3a_1h^2 + 3a_2h + a_3) = 0$

If we choose h so that $a_0\ h + a_1 = 0$, the second term disappears. The equation now becomes

$$a_0\ y^3 + \frac{3H}{a_0} y + G/a_0^2 = 0, \text{ where } H = a_0\ a_2 - a_1^2$$

$$\text{and} \quad G = a_0^2\ a_3 - 3\ a_0\ a_1\ a_2 + 2\ a_1^3.$$

$$\therefore\ a_0^3\ y^3 + 3\ H\ a_0 y + G = 0. \qquad (2)$$

The roots of (2) are $\alpha + a_1/a_0$, $\beta + a_1/a_0$, $\gamma + a_1/a_0$.

By again substituting $a_0\ y = z$, the cubic equation (1) is reduced to its simplest form

$$z^3 + 3\ Hz + G = 0, \qquad (3)$$

whose roots are $a_0\ \alpha + a_1$, $a_0\ \beta + a_1$, $a_0\ \gamma + a_1$.

The solution of (3) evidently at once leads to the solution of (1).

Cardan's Method.* Let a root of (3) be $z = u^{\frac{1}{3}} + v^{\frac{1}{3}}$

$$\therefore\ z^3 = u + v + 3\ u^{\frac{2}{3}}\ v^{\frac{1}{3}} + 3\ u^{\frac{1}{3}}\ v^{\frac{2}{3}}.$$

$$= (u+v) + 3\ u^{\frac{1}{3}}\ v^{\frac{1}{3}}\ z.$$

$$\therefore\ z^3 - 3\ u^{\frac{1}{3}}\ v^{\frac{1}{3}}\ z - (u+v) = 0 \qquad (4)$$

By comparing (3) and (4),

$$u^{\frac{1}{3}}\ v^{\frac{1}{3}} = -H \text{ or } uv = -H^3.$$

$$\text{and} \quad u + v = -G.$$

Therefore u, v are the roots of the quadratic

$$t^2 + Gt - H^3 = 0.$$

* He was an Italian, who lived from 1501 to 1576.

ಆದ್ದರಿಂದ, $a_0 h + a_1 = 0$ ಆಗುವಂತೆ, h ಆರಿಸಿಕೊಂಡರೆ, ಎರಡನೆಯ ಪದವು ಕಳೆದು ಹೋಗುತ್ತದೆ. ಸಮೀಕರಣವು ಈಗ

$$a_0 y^3 + 3\frac{H}{a_0} y + \frac{G}{a_0^2} = 0, \text{ ಇಲ್ಲಿ } H = a_0 a_2 - a_1^2$$

$$G = a_0^2 a_3 - 3 a_0 a_1 a_2 + 2 a_1^3$$

$$\therefore \quad a_0^3 y^3 + 3 H a_0 y + G = 0 \qquad (2)$$

(2)ರ ಮೂಲಗಳು $\alpha + \frac{a_1}{a_0}$, $\beta + \frac{a_1}{a_0}$, $\gamma + \frac{a_1}{a_0}$

ಪುನಃ $a_0 y = z$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಿದರೆ,

$$z^3 + 3 H z + G = 0 \qquad (3)$$

ಎಂಬ ಘನ ಸಮೀಕರಣದ ಸುಲಭ ರೂಪವು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. (3)ರ ಮೂಲಗಳು $a_0 \alpha + a_1$, $a_0 \beta + a_1$, $a_0 \gamma + a_1$.

ಆದ್ದರಿಂದ, (3)ನ್ನು ಬಿಡಿಸಿದರೆ, ದತ್ತಸಮೀಕರಣ (1)ರ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಒಡನೆಯೇ ಪಡೆಯಬಹುದು.

(3)ನ್ನು ಬಿಡಿಸಲು,

ಕಾರ್ಡಾನನ * ವಿಧಾನ : (3)ರ ಮೂಲವು

$z = u^{\frac{1}{3}} + v^{\frac{1}{3}}$ ಆಗಿರಲಿ.

$$\therefore \quad z^3 = u + v + 3 u^{\frac{2}{3}} v^{\frac{1}{3}} + 3 u^{\frac{1}{3}} v^{\frac{2}{3}}$$

$$= (u+v) + 3 u^{\frac{1}{3}} v^{\frac{1}{3}} z$$

$$\therefore \quad z^3 - 3 u^{\frac{1}{3}} v^{\frac{1}{3}} z - (u+v) = 0 \qquad (4)$$

(3), (4) ಗಳನ್ನು ಹೋಲಿಸುವುದರಿಂದ

$$u^{\frac{1}{3}} v^{\frac{1}{3}} = -H \text{ ಅಥವಾ } uv = -H^3$$

$$u + v = -G.$$

ಆದ್ದರಿಂದ u, v ಗಳು $t^2 + Gt - H^3 = 0$ ಎಂಬ ವರ್ಗಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು.

* ಇಟಲಿ ದೇಶದವನಾದ ಈತನು 1501 ರಿಂದ 1576ರ ವರೆಗೆ ಇದ್ದನು.

$$\therefore u = \tfrac{1}{2}\left(-G + \sqrt{G^2 + 4H^3}\right),\ v = \tfrac{1}{2}\left(-G - \sqrt{G^2 + 4H^3}\right).$$

$u^{\frac{1}{3}}$ has three values, viz

$$\left(\frac{-G + \sqrt{G^2 + 4H^3}}{2}\right)^{\frac{1}{3}},\ \omega\left(\frac{-G + \sqrt{G^2 + 4H^3}}{2}\right)^{\frac{1}{3}},\ \omega^2\left(\frac{-G + \sqrt{G^2 + 4H^3}}{2}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Similarly for $v^{\frac{1}{3}}$. These values must be paired so as to give $u^{\frac{1}{3}} v^{\frac{1}{3}} = -H$. Hence the three values of z are

$$\left(\frac{-G + \sqrt{G^2 + 4H^3}}{2}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{-G - \sqrt{G^2 + 4H^3}}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\omega(\quad ,, \quad)^{\frac{1}{3}} + \omega^2(\quad ,, \quad)^{\frac{1}{3}}$$

$$\omega^2(\quad ,, \quad)^{\frac{1}{3}} + \omega(\quad ,, \quad)^{\frac{1}{3}}.$$

Cardan's Method looks quite simple. But there is a peculiarity, which used to be even called a defect in the method. The expression $G^2 + 4H^3$ will be negative when the roots of (3) are all real. [The proof is not given in this book]. Hence—$G + \sqrt{G^2 + 4H^3}$ becomes a complex number. Its cube roots have to be obtained by the help of trigonometry by using De Moivres's Theorem.

12·4. *Descartes'* * *Method.* In this method, the given cubic function is expressed as the sum or difference of two cubes.

Let $a_0 x^3 + 3a_1 x^2 + 3a_2 x + a_3 \equiv A(x-\lambda)^3 + B(x-\mu)^3$. Required to determine the values of A, B, λ, μ. Expanding the expression on the right side, and comparing the terms of both sides, we get

$$\left.\begin{aligned} A + B &= a_0 \\ A\lambda + B\mu &= -a_1 \\ A\lambda^2 + B\mu^2 &= a_2 \\ A\lambda^3 + B\mu^3 &= -a_3 \end{aligned}\right\} \quad (A)$$

* Descartes is a famous French mathematician, who lived from 1596 to 1650. He is the founder of analytical geometry.

$$\therefore\ u = \tfrac{1}{2}\left(-G+\sqrt{G^2+4H^3}\right),\ v = \tfrac{1}{2}\left(-G-\sqrt{G^2+4H^3}\right)$$

$u^{\frac{1}{3}}$ಗೆ ಮೂರು ಬೆಲೆಗಳಿರುತ್ತವೆ $\left(\frac{-G+\sqrt{G^2+4H^3}}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$, $\omega\left(\frac{-G+\sqrt{G^2+4H^3}}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$, $\omega^2\left(\frac{-G+\sqrt{G^2+4H^3}}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$, ಹೀಗೆಯೇ $v^{\frac{1}{3}}$ ಗೂಸಹ. $u^{\frac{1}{3}}\ v^{\frac{1}{3}} = -H$ ಆಗುವ ಈ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿಕೊಂಡು, zನ ಮೂರು ಬೆಲೆಗಳನ್ನು

$$\left(\frac{-G+\sqrt{G^2+4H^3}}{2}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{-G-\sqrt{G^2+4H^3}}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\omega\left(\quad ,, \quad\right)^{\frac{1}{3}} + \omega^2\left(\quad ,, \quad\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\omega^2\left(\quad ,, \quad\right)^{\frac{1}{3}} + \omega\left(\quad ,, \quad\right)^{\frac{1}{3}}$$

ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

ಕಾರ್ಡಾನನ ವಿಧಾನವು ಸುಲಭವಾಗಿಯೇ ಕಾಣುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಇದರಲ್ಲಿ ಒಂದು ವೈಚಿತ್ರ್ಯವಿದೆ. ಹಿಂದೆ ಇದನ್ನು ದೋಷವೆಂದೇ ಎಣಿಸುತ್ತಿದ್ದರು. (3)ರ ಮೂಲಗಳು ಎಲ್ಲವೂ ವಾಸ್ತವವಾದಾಗ, G^2+4H^3 ಋಣವಾಗುತ್ತದೆ. [ಇದರ ಸಾಧನೆಯನ್ನು ಈ ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿಲ್ಲ]. ಆದ್ದರಿಂದ $-G+\sqrt{G^2+4H^3}$ ಒಂದು ಮಿಶ್ರ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗುತ್ತದೆ. ಇದರ ಘನಮೂಲಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಲು, ತ್ರಿಕೋನ ಮಿತಿಯ ಸಹಾಯದಿಂದ ಡಿ ಮಾವ್ರನ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ.

12.4. **ಡೆಕಾರ್ಟೆನ * ವಿಧಾನ.** ಈ ವಿಧಾನದಲ್ಲಿ ದತ್ತ ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು ಎರಡು ಘನಗಳ ಮೊತ್ತ ಅಥವಾ ಅಂತರದಂತೆ ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

$a_0x^3+3a_1x^2+3a_2x+a_3 \equiv A(x-\lambda)^3+B(x-\mu)^3$ ಆಗಿರಲಿ. A, B, λ, μಗಳ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಪಡೆಯಬೇಕು. ಬಲಗಡೆಯ ಉಕ್ತಿಯನ್ನು ವಿಸ್ತರಿಸಿ, ಎರಡುಕಡೆಗಳ ಪದಗಳನ್ನೂ ಹೋಲಿಸುವುದರಿಂದ,

$$\left.\begin{aligned} A + B &= a_0 \\ A\lambda + B\mu &= -a_1 \\ A\lambda^2 + B\mu^2 &= a_2 \\ A\lambda^3 + B\mu^3 &= -a_3 \end{aligned}\right\} \qquad (A)$$

ಎಂದು ಬರುತ್ತದೆ,

---

* ಈ ಸುಪ್ರಸಿದ್ಧಗಣಿತ ವಿದ್ವಾಂಸನು ಫ್ರಾನ್ಸ್ ದೇಶದವನು. 1596ರಿಂದ 1650ರ ವರೆಗೆ ಬದುಕಿದ್ದನು. ಬೀಜರೇಖಾಗಣಿತದ ಸ್ಥಾಪಕನೇ ಇವನು.

Let λ and μ be the roots of the equation

$$p + q\,t + r\,t^2 = 0 \qquad \text{(i)}$$

$$\therefore\ p + q\,\lambda + r\,\lambda^2 = 0, \quad p + q\,\mu + r\,\mu^2 = 0$$

$$\therefore\ a_0\,p - a_1\,q + a_2\,r = 0 \qquad \text{(ii)}$$

$$a_1\,p - a_2\,q + a_3\,r = 0 \qquad \text{(iii)}$$

Eliminating p, q, r from (i), (ii), (iii), we obtain

$$\begin{vmatrix} 1 & t & t^2 \\ a_0 & -a_1 & a_2 \\ a_1 & -a_2 & a_3 \end{vmatrix} = 0$$

or $t^2\,(a_0\,a_2 - a_1^2) + t\,(a_0\,a_3 - a_1\,a_2) + (a_1\,a_3 - a_2^2) = 0$ (iv)

The roots of this quadratic give the values of λ and μ. Having obtained these, A and B are obtained by solving any two of the equations in (A).

The given cubic equation now becomes

$$A\,(x-\lambda)^3 + B\,(x-\mu)^3 = 0,$$

with the values of A, B, λ, μ obtained as above.

$$\therefore\quad A^{\frac{1}{3}}\,(x-\lambda) = -B^{\frac{1}{3}}\,(x-\mu)$$

$$\text{or}\quad A^{\frac{1}{3}}\,(x-\lambda) = -\,\omega B^{\frac{1}{3}}\,(x-\mu)$$

$$\text{or}\quad A^{\frac{1}{3}}\,(x-\lambda) = -\,\omega^2\,B^{\frac{1}{3}}\,(x-\mu),$$

where ω is a complex cube root of unity (see 12·2).

W can now solve these for x, and thus obtain its three values.

Example. Solve $x^3 - 24\,x^2 + 30\,x - 26 = 0$.

Writing it as $A\,(x-\lambda)^3 + B\,(x-\mu)^3 = 0$, we have

$A + B = 1$, $A\lambda + B\mu = 8$, $A\lambda^2 + B\mu^2 = 10$, $A\lambda^3 + B\mu^3 = 26$.

Here $a_0 = 1$, $a_1 = -8$, $a_2 = 10$, $a_3 = -26$. Hence equation (iv) becomes $t^2 - t - 2 = 0$ $\therefore\ \lambda = 2, \mu = -1$

$$\therefore\ A = 3,\ B = -2$$

The equation is therefore $3\,(x-2)^3 - 2\,(x+1)^3 = 0$.

λ, μ ಎಂಬುವು

$$p + qt + rt^2 = 0 \qquad \text{(i)}$$

ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳಾಗಿರಲಿ.

$$\therefore\ p + q\lambda + r\lambda^2 = 0,\ p + q\mu + r\mu^2 = 0$$

$$\therefore\ a_0p - a_1q + a_2r = 0 \qquad \text{(ii)}$$

ಮತ್ತು $a_1p - a_2q + a_3r = 0$ (iii)

(i), (ii), (iii) ರಿಂದ, p, q, r ವಿಸರ್ಜಿಸಿದರೆ

$$\begin{vmatrix} 1 & t & t^2 \\ a_0 & -a_1 & a_2 \\ a_1 & -a_2 & a_3 \end{vmatrix} = 0$$

ಅಥವಾ $t^2(a_0a_2 - a_1^2) + t(a_0a_3 - a_1a_2) + (a_1a_3 - a_2^2) = 0$. (iv)

ಈ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಎರಡು ಮೂಲಗಳೇ λ, μ ಗಳ ಬೆಲೆಗಳು. ಇವನ್ನು ಪಡೆದಮೇಲೆ, (A) ನಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ A, B ಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು.

ಈಗ, ದತ್ತ ಘನಸಮೀಕರಣವು, ಈ ರೀತಿ ಪಡೆದ A, B, λ, μ ಗಳಿಂದ

$$A(x - \lambda)^3 + B(x - \mu)^3 = 0$$ ಆಗುತ್ತದೆ.

$$\therefore\ A^{\frac{1}{3}}(x - \lambda) = -B^{\frac{1}{3}}(x - \mu)$$

ಅಥವಾ $A^{\frac{1}{3}}(x - \lambda) = -B^{\frac{1}{3}}\omega(x - \mu)$

ಅಥವಾ $A^{\frac{1}{3}}(x - \lambda) = -B^{\frac{1}{3}}\omega^2(x - \mu)$

ಇಲ್ಲಿ ω ಎಂಬುದು 1ರ ಮಿಶ್ರಸಂಖ್ಯಾ ಘನ ಮೂಲ (12.2 ನೋಡಿ). ಇವುಗಳಿಂದ, x ನ ಮೂರು ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆ. $x^3 - 24x^2 + 30x - 26 = 0$ ಬಿಡಿಸಿ.

ಇದನ್ನು $A(x-\lambda)^3 + B(x-\mu)^3 = 0$ ಎಂದು ಬರೆದರೆ,

$A + B = 1$, $A\lambda + B\mu = 8$, $A\lambda^2 + B\mu^2 = 10$, $A\lambda^3 + B\mu^3 = 26$

ಇಲ್ಲಿ $a_0 = 1$, $a_1 = -8$, $a_2 = 10$, $a_3 = -26$, ಆದ್ದರಿಂದ ಸಮೀಕರಣ (iv)

$t^2 - t - 2 = 0$ ಆಗುತ್ತದೆ $\therefore\ \lambda = 2,\ \mu = -1$

$$\therefore\ A = 3,\ B = -2$$

$\therefore\ 3^{\frac{1}{3}}(x-2) = 2^{\frac{1}{3}}(x+1)$, or $3^{\frac{1}{3}}(x-2) = \omega . 2^{\frac{1}{3}}(x+1)$, or $3^{\frac{1}{3}}(x-2) = \omega^2 . 2^{\frac{1}{3}}(x+1)$.

The roots of the given cubic are

$$\frac{2.3^{\frac{1}{3}} + 2^{\frac{1}{3}}}{3^{\frac{1}{3}} - 2^{\frac{1}{3}}},\quad \frac{2.3^{\frac{1}{3}} + \omega.2^{\frac{1}{3}}}{3^{\frac{1}{3}} - \omega.2^{\frac{1}{3}}},\quad \frac{2.3^{\frac{1}{3}} + \omega^2.2^{\frac{1}{3}}}{3^{\frac{1}{3}} - \omega^2.2^{\frac{1}{3}}}.$$

The method fails in one case. When $\lambda = \mu$, we can not solve for A and B from the equations (A). When $\lambda = \mu$, the left side of equation (iv) becomes a perfect square. When this happens, the given cubic equation has two roots equal; see Ex. 4, 10·6. Therefore, when the given cubic function is in the form $a_0(x-\alpha)^2(x-\beta)$, it cannot be expressed as the sum or the difference of two cubes. Descartes's method fails in this case. But in this case, we can solve the equation by the method indicated in Chapter 10, using the knowledge that the equation has two roots equal.

12·5. *Trigonometrical Method.* This method is applicable, when the roots are all real.

We have $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$.

$$\text{or}\quad \cos^3\theta - \tfrac{3}{4}\cos\theta - \tfrac{1}{4}\cos 3\theta = 0 \qquad (1)$$

If the given cubic is $Z^3 + 3Hz + G = 0$,

$$\text{let } z = r\cos\theta \quad \therefore \cos^3\theta + \frac{3H}{r^2}\cos\theta + \frac{G}{r^3} = 0 \qquad (2)$$

Comparing (1) and (2),

$$\frac{H}{r^2} = -\tfrac{1}{4},\ \frac{G}{r^3} = -\tfrac{1}{4}\cos 3\theta.$$

$$\therefore\ r = 2\sqrt{-H},\quad \cos 3\theta = \frac{-4G}{r^3} = -\frac{G}{2\sqrt{-H^3}}$$

$\therefore$ ಸಮೀಕರಣವು $3(x-2)^3 - 2(x+1)^3 = 0$ ಆಗುತ್ತದೆ.

$\therefore$ $3^{\frac{1}{3}}(x-2) = 2^{\frac{1}{3}}(x+1)$, ಅಥವಾ $3^{\frac{1}{3}}(x-2) = \omega . 2^{\frac{1}{3}}(x+1)$, ಅಥವಾ

$3^{\frac{1}{3}}(x-2) = \omega^2 . 2^{\frac{1}{3}}(x+1)$. ದತ್ತಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು

$$\frac{2 . 3^{\frac{1}{3}} + 2^{\frac{1}{3}}}{3^{\frac{1}{3}} - 2^{\frac{1}{3}}}, \quad \frac{2 . 3^{\frac{1}{3}} + \omega . 2^{\frac{1}{3}}}{3^{\frac{1}{3}} - \omega . 2^{\frac{1}{3}}}, \quad \frac{2 . 3^{\frac{1}{3}} + \omega^2 . 2^{\frac{1}{3}}}{3^{\frac{1}{3}} - \omega^2 . 2^{\frac{1}{3}}}.$$

ಈ ವಿಧಾನದಲ್ಲಿ ಒಂದು ನ್ಯೂನತೆಇದೆ. $\lambda = \mu$ ಆದಾಗ, (A)ಸಮೀಕರಣ ಗಳಿಂದ A, Bಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಲು ಆಗುವುದಿಲ್ಲ, $\lambda = \mu$ ಆಗಲು, ಸಮೀಕರಣ (iv)ರ ಎಡಭಾಗವು ಶುದ್ಧವರ್ಗವಾಗಬೇಕು. ಹೀಗೆ ಆದಾಗ, ದತ್ತ ಘನ ಸಮೀಕರಣಗಳಿಗೆ ಸಮಮೂಲಗಳಿರುತ್ತವೆ. 10.6. ಉದಾ : 4 ನೋಡಿ. ಅದ್ದರಿಂದ, ದತ್ತ ಘನಉತ್ಪನ್ನವು $a_0 (x-\alpha)^2 (x-\beta)$ರೂಪದಲ್ಲಿರುವಾಗ ಇದನ್ನು ಎರಡು ಘನಗಳ ಅಂತರ ಅಥವಾ ಮೊತ್ತದಂತೆ ಬರೆಯಲು ಆಗುವುದಿಲ್ಲ, ಡೇಕಾರ್ಟನ ವಿಧಾನವು ಇಲ್ಲಿ ಫಲಿಸುವುದಿಲ್ಲ. ಆದರೆ ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ, ಸಮಮೂಲಗಳಿರುವ ತಿಳುವಳಿಕೆಯಿಂದ, ಅಧ್ಯಾಯ 10ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವ ವಿಧಾನದಿಂದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಸಾಧಿಸಬಹುದು,

12.5. **ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯವಿಧಾನ.** ಮೂರೂ ಮೂಲಗಳು ವಾಸ್ತವವಾದಾಗ, ಈ ವಿಧಾನವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು.

ಈಗ $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

ಅಥವಾ $\cos^3\theta - \frac{3}{4}\cos\theta - \frac{1}{4}\cos 3\theta = 0$ (1)

ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣವು $z^3 + 3Hz + G = 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ,

$z = r\cos\theta$ ಆಗಿರಲಿ $\therefore \cos^3\theta + \frac{3H}{r^2}\cos\theta + \frac{G}{r^3} = 0$ (2)

(1) ಮತ್ತು (2)ನ್ನು ಹೋಲಿಸುವುದರಿಂದ,

$\frac{H}{r^2} = -\frac{1}{4}$, $\frac{G}{r^3} = -\frac{1}{4}\cos 3\theta$

$\therefore$ $r = 2\sqrt{-H}$, $\cos 3\theta = -\frac{4G}{r^3} = -\frac{G}{2\sqrt{-H^3}}$

If the roots are all real, $G^2 + 4H^3 < 0$, as stated before. Hence, we can obtain a real value for θ. If one value of θ is α, the other two values are $\frac{2\pi}{3} + \alpha$, $\frac{2\pi}{3} - \alpha$. Also r is real, since H is negative. Hence the required roots are $r \cos \alpha$,

$$r \cos\left(\frac{2\pi}{3} + \alpha\right),\ r \cos\left(\frac{2\pi}{3} - \alpha\right).$$

Example : Solve the equation $z^3 - 3z + 1 = 0$.

Here $H = -1$, $G = 1$. $\therefore r = 2$, $\cos 3\theta = \frac{1}{2}$ $\therefore \theta = 20°$.

The roots of the equation are $2 \cos 20°$, $2 \cos 140°$, $2 \cos 100°$.

12·6 There are several methods to solve a quartic (biquadratic equation). We shall explain only one method through an example.

To solve the equation $x^4 + 3x^3 + x^2 - 2 = 0$.

Ferrari's Method.* Let us write the given equation as

$$(x^2 + px + q)^2 - (mx + n)^2 = 0.$$

Comparing the two equations, we have

$p = \frac{3}{2}$, $2q + \frac{5}{4} = m^2$, $\frac{3}{2}q = mn$, $q^2 + 2 = n^2$.

$$\therefore\ (2q + \tfrac{5}{4})(q^2 + 2) = \tfrac{9}{4} q^2$$

$$\text{or}\quad 2q^3 - q^2 + 4q + \tfrac{5}{2} = 0.$$

One root is $q = -\frac{1}{2}$ (by inspection)

$$\therefore\ m^2 = -1 + \tfrac{5}{4},\ mn = -\tfrac{3}{4}$$

$$\therefore\ p = \tfrac{3}{2},\ q = -\tfrac{1}{2},\ m = \tfrac{1}{2},\ n = -\tfrac{3}{2}.$$

The given equation is therefore

$$(x^2 + \tfrac{3}{2}x - \tfrac{1}{2})^2 - \left(\frac{x-3}{2}\right)^2 = 0$$

$\therefore\ x^2 + x + 1 = 0$ or $x^2 + 2x - 2 = 0$.

The roots of the given equation are ω, ω^2, $-1 \pm \sqrt{3}$.

* He too is an Italian. Date : From 1522 to about 1560.

ಮೂರೂ ಮೂಲಗಳು ನಿಜವಿದ್ದರೆ, $G^2 + 4H^3 < 0$ ಎಂದು ಹಿಂದೆ ತಿಳಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ θಗೆ ಒಂದು ವಾಸ್ತವ ಬೆಲೆದೊರೆಯುತ್ತದೆ. θಗೆ ಒಂದು ಬೆಲೆ α ಆದರೆ $\frac{2\pi}{3} + \alpha$, $\frac{2\pi}{3} - \alpha$ ಇನ್ನೆರಡು ಬೆಲೆಗಳು. H ಋಣಸಂಖ್ಯೆಯಾದ್ದರಿಂದ, r ಸಹ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ $r\cos\alpha$, $r\cos\left(\frac{2\pi}{3} + \alpha\right)$, $r\cos\left(\frac{2\pi}{3} - \alpha\right)$ ಬೇಕಾದ ಮೂಲಗಳು.

ಉದಾಹರಣೆ : $z^3 - 3z + 1 = 0$ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಸಾಧಿಸಿ.

ಇಲ್ಲಿ $H = -1, G = 1 \therefore r = 2, \cos 3\theta = \frac{1}{2} \therefore \theta = 20^\circ$

ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು $2\cos 20^\circ$, $2\cos 140^\circ$, $2\cos 100^\circ$.

12.6 ಚತುಷ್ಘಾತ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸಲು ಹಲವು ವಿಧಾನಗಳಿವೆ. ಒಂದು ವಿಧಾನವನ್ನು ಮಾತ್ರ ಉದಾಹರಣೆಯಮೂಲಕ ತಿಳಿಸುತ್ತೇವೆ.

$x^4 + 3x^3 + x^2 - 2 = 0$ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ.

ಫೆರಾರಿಯ* ವಿಧಾನ

ಇದನ್ನು $(x^2 + px + q)^2 - (mx + n)^2 = 0$

ಎಂದು ಬರೆಯೋಣ. ಎರಡೂ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಹೋಲಿಸುವುದರಿಂದ

$p = \frac{3}{2}$, $2q + \frac{5}{4} = m^2$, $\frac{3}{2}q = mn$, $q^2 + 2 = n^2$

$\therefore \; (2q + \frac{5}{4})(q^2 + 2) = \frac{9}{4}q^2$

$\therefore \; 2q^3 - q^2 + 4q + \frac{5}{2} = 0$

$q = -\frac{1}{2}$ ಒಂದು ಮೂಲ (ಪರೀಕ್ಷೆಯಿಂದ).

$\therefore \; m^2 = -1 + \frac{5}{4}, mn = -\frac{3}{4}$

$\therefore \; p = \frac{3}{2}, q = -\frac{1}{2}, m = \frac{1}{2}, n = -\frac{3}{2}.$

$\therefore \; (x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{2})^2 - \left(\frac{x-3}{2}\right)^2 = 0$

$\therefore \; x^2 + x + 1 = 0$ ಅಥವಾ $x^2 + 2x - 2 = 0$

ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು $\omega, \omega^2, -1 \pm \sqrt{3}$.

---

* ಈತನೂ ಇಟಲಿದೇಶದವನು. ಕಾಲ 1522 ರಿಂದ ಸುಮಾರು 1560

The above example is numerical, but the method indicated is general. The general expression of the fourth degree, viz. $a_0 x^4 + 4a_1 x^3 + 6a_2 x^2 + 4a_3 x + a_4$ can be transformed into the form $(x^2 + px + q)^2 - (mx + n)^2$. The value of q is obtained as a root of a cubic equation. Hence, the given function can be expressed in three different ways as the difference between the square of a quadratic function and the square of a linear expression. Since this difference can be factorized, it follows that *any quartic expression can be expressed in three ways as the product of two quadratic expressions.*

Exercises 12·1.

Solve :—

1. $2x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0$ (Cardan's Method)

   [First remove the second term].

2. $x^3 + 3x - 14 = 0$ (Cardan's Method).

   [Observe that $7 + 5\sqrt{2} = (1 + \sqrt{2})^3$].

3. $2x^3 + 3x^2 - 21x + 19 = 0$ (Descartes's Method)

4. $x^3 + 30x^2 - 24x + 28 = 0$ (,,)

5. $x^4 + 4x^3 + 7x^2 + 2x - 5 = 0$ (Ferrari's Method)

6. $x^4 - 2x^3 - 6x^2 + 10x - 3 = 0$ (,,).

ಮೇಲಣ ಉದಾಹರಣೆಯು ಸಾಂಖಿಕವಾದರೂ, ಅದರ ವಿಧಾನವು ಸಾರ್ವತ್ರಿಕವಾದುದು. $a_0 x^4 + 4 a_1 x^3 + 6 a_2 x^2 + 4 a_3 x + a_4$ ಎಂಬ ಸಾರ್ವತ್ರಿಕ ರೂಪದ ಚತುಷ್ಘಾತದ ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು $(x^2 + p x + q)^2 -(m x + n)^2$ ಎಂಬ ರೂಪಕ್ಕೆ ತಿರುಗಿಸಬಹುದು. qನ ಬೆಲೆಯು ಒಂದು ಘನ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು ಒಂದು ವರ್ಗೋಕ್ತಿಯು, ಒಂದು ಸರಳೋಕ್ತಿಯು ವರ್ಗಗಳ ಅಂತರವಾಗಿ ಮೂರು ವಿಧದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಹುದು. ಈ ಅಂತರವನ್ನು ಅಪವರ್ತಿಸಬಹುದಾದ್ದರಿಂದ, **ಯಾವುದೇ ಚತುಷ್ಘಾತ ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು ಎರಡು ವರ್ಗೋಕ್ತಿಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧದ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಮೂರುವಿಧದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಹುದು.**

ಅಭ್ಯಾಸ 21·1

ಬಿಡಿಸಿ ;

1. $2x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0$ (ಕಾರ್ಡಾನನ ವಿಧಾನ)
   [ಮೊದಲು ಎರಡನೆಯ ಪದವನ್ನು ತೆಗೆಯಿರಿ]
2. $x^3 + 3x - 14 = 0$
   $[7 + 5\sqrt{2} = (1 + \sqrt{2})^3]$
3. $2x^3 + 3x^2 - 21x + 19 = 0$ (ಡೇಕಾರ್ಟನ ವಿಧಾನ)
4. $x^3 + 30x^2 - 24x + 28 = 0$ (,,)
5. $x^4 + 4x^3 + 7x^2 + 2x - 5 = 0$ (ಫೆರಾರಿಯ ವಿಧಾನ)
6. $x^4 - 2x^3 - 6x^2 + 10x - 3 = 0$ (,,)

———

Answers (ಉತ್ತರಗಳು.)

Exercises 1·2 — ಅಭ್ಯಾಸ 1.2

1. (i) $12\alpha^2 - 2$ (ii) $\frac{3}{4}\alpha^2 - 2$ (iii) $3\left(t + \frac{1}{t}\right)^2 \alpha^2 - 2$

2. (3) is not a function. (1), (2), (4) are functions
   (3) ಉತ್ಪನ್ನವಲ್ಲ; (1), (2), (4) ಉತ್ಪನ್ನಗಳು

3. (2) is a function ; (1), (3) are not
   (2) ಉತ್ಪನ್ನ ; (1), (3) ಉತ್ಪನ್ನಗಳಲ್ಲ

4. (1) Domain : The set of real numbers ; Range = the set of positive real numbers
   ಪ್ರಾಂತ : ವಾಸ್ತವಸಂಖ್ಯಾಗಣ ; ವ್ಯಾಪ್ತಿ = ಧನವಾಸ್ತವಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣ

   (2) Domain : The set of natural numbers ; Range = The set of squares of natural numbers
   ಪ್ರಾಂತ : ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯಾಗಣ ; ವ್ಯಾಪ್ತಿ = ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಗಣ.

   (3) Domain : The set of integers ; Range = the set of even integers
   ಪ್ರಾಂತ : ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಣ ; ವ್ಯಾಪ್ತಿ : ಸಮಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣ.

Exercises 6·2 — ಅಭ್ಯಾಸ 6.2

1. $x = 1, y = -2, z = 3.$ 2. $\frac{8}{11}, \frac{17}{11}, \frac{18}{11}$

3. $x = \frac{(d-b)(d-c)}{(a-b)(a-c)}$, etc. ಇತ್ಯಾದಿ. 5. $1 + ys + sx + xy = 0$

Exercises 7.1 — ಅಭ್ಯಾಸ 7.1

8. $A^2 - AB + BA - B^2$, $A^3 + A^2B + ABA + AB^2 + BA^2 + BAB + B^2A + B^3$

Exercises 8.1 — ಅಭ್ಯಾಸ 8.1

1. (1) $\begin{pmatrix} \frac{6}{35} & \frac{1}{5} & \frac{2}{35} \\ -\frac{4}{35} & \frac{1}{5} & -\frac{13}{35} \\ -\frac{9}{35} & \frac{1}{5} & -\frac{3}{35} \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{13}{15} & -\frac{2}{15} \\ \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{15} & -\frac{1}{15} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{11}{15} & \frac{4}{15} \end{pmatrix}$

Exercises 9.1 — ಅಭ್ಯಾಸ 9.1

1. 2. 2. 2. 3. 3. 4. 4.

Exercises 9.3 — ಅಭ್ಯಾಸ 9.3

2. $x_1 = 2k,\ x_2 = k,\ x_3 = 0$. 3. $x = 2k,\ y = -2k,\ z = k$

4. $x = -\frac{9}{5}k,\ y = -\frac{6}{5}k,\ z = k$. 5. No solutions, ಮೂಲಗಳಿಲ್ಲ.

6. No solutions. ಮೂಲಗಳಿಲ್ಲ. 7. $x_1 = \frac{5}{2},\ x_2 = -\frac{1}{2},\ x_3 = -\frac{1}{2},$ $x_4 = -\frac{1}{2}$.

8. No solutions. ಮೂಲಗಳಿಲ್ಲ. 9. $x = -1,\ y = 4,\ z = 4$.

10. $x = \frac{1}{5}(5z+3),\ y = \frac{1}{5}(10z+7),\ z =$ any value k.

11. $x = \frac{1}{2},\ y = \frac{3}{2},\ z = \frac{3}{2}$. 12. No solutions. ಮೂಲಗಳಿಲ್ಲ.

13. $x = \frac{1}{8}(14-3w),\ y+t = \frac{1}{8}(3w-10)$; w and t can have any values. w, t ಗಳಿಗೆ ಯಾವುದೇ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕೊಡಬಹುದು.

14. $\lambda = 1,\ \lambda = -2$. No solutions if $\lambda = 1$. $\lambda = 1$ ಆದಾಗ ಮೂಲಗಳಿಲ್ಲ. $x = y = z - 1,\ z =$ any k, if $\lambda = -2$.

15. (i) $k = -5,\ l \neq 5$ (ii) $k \neq -5,\ l =$ any value (iii) $k = -5,\ l = 5$.

16. $l=1-2k$, $k=$ any number.
$x=1$, $y=2$, $z=-2$, $w=-1$.

Exercises 10.1 — ಅಭ್ಯಾಸ 10.1

1. (i) $3r-pq$ (ii) pr (iii) $\dfrac{q^2-2pr}{r^2}$, (iv) $3(pq-r)-p^3$ (v) $2p^3-9pq+27r$.

2. 36   4. $2, 2, -\frac{3}{2}$ 5. $6, 4, -1$

6. $(4qr-4pq)^2=(6q^2-21pr)(12p^2-42q)$

7. $\sqrt{2}, -\sqrt{2}, -2\pm\sqrt{3}$.   8. $2\pm\sqrt{2}, 2\pm\sqrt{3}$

9. $1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{9}$.   10. $ac^3=db^3$.   11. $-5, -2, 1, 4$.

12. $\frac{p}{2}\left(q-\frac{p^2}{4}\right)=r$; $(2p^2+8q)(72q-22p^2)=6400\,s$.

Exercises 10.2 — ಅಭ್ಯಾಸ 10.2

2. $2+\sqrt{3}, 2-\sqrt{3}, -2\frac{1}{2}$.   3. $2+3i, 2-3i, -1$.

5. $5\pm\sqrt{2}, -2\pm\sqrt{3}$.   6. $\pm\sqrt{2}\pm\sqrt{3}, -\frac{2}{3}$

7. $\sqrt{3}-2, -\sqrt{3}-2, i, -i, \dfrac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$

Exercises 10.5 — ಅಭ್ಯಾಸ 10.5

1. (1) $-\frac{7}{3}, -\frac{7}{3}, 1$ (2) $1, 1, \dfrac{-3\pm\sqrt{89}}{8}$
(3) $2, 2, 2, -\frac{5}{3}$.   (4) $1, 1, -3, -3$
(5) $1, 1, 1, -3$.   (6) $i, i, -i, -i, 1$.
(7) $-1, -1, -1, 2, 2$

Exercises 10.6 — ಅಭ್ಯಾಸ 10.6

1. 208, 7357   5. 1.   6. $x^3-2x^2-x+1=0$; 57.

Exercises 11.1 — ಅಭ್ಯಾಸ 11.1

1. $5x^6 + 18x^4 + 54x^3 + 486x + 486 = 0.$

2. $x^7 - 2x^6 + 4x^5 + 16x^4 - 128x + 512 = 0$

3. $3(x-1)^3 + 2(x-1)^2 - 2(x-1) - 4 = 0$

4. $(x+2)^4 - 2(x+2)^3 - 2(x+2)^2 + 5 = 0$

5. $\frac{4}{2}\frac{9}{5}$ 6. $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{7}$ 7. $q(9pr - 2q^2) = 27r^2$

Exercises 11.2 — ಅಭ್ಯಾಸ 11.2

1. $y^4 - 70y^3 + 26y^2 - 13y + 9 = 0;\ 26, 13$

3. (i) $(y-q)^3 + q(y-q)^2 + pr(y-q) + r^2 = 0$

   (ii) $(y-q)^3 + p^2(y-q)^2 + p^2q(y-q) + rp^3 = 0$

   (iii) $(p^2-2q-y)(p^2-y)^2 = 2.\,[p(p^2-2q-y) + 2r]^2$

4. (i) $ry^3 - qy^2 - 1 = 0$

   (ii) $r^2(y+1)^3 + q^2(y+2) = 0.$

5. $h = 2.$ 6. $-2,\ 2\omega - 4,\ 2\omega^2 - 4$ 8. 363

Exercises 11.3—ಅಭ್ಯಾಸ 11.3

1. $1,\ \frac{-1+\sqrt{5} \pm i\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4},\ \frac{-1-\sqrt{5} \pm i\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$

2. $-1,\ \frac{\sqrt{5}+1 \pm i\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4},\ \frac{1-\sqrt{5} \pm i\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$

3. $1,\ -1,\ \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2},\ \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$

4. $-1,\ -1,\ 2 \pm \sqrt{3}$

5. $\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2},\ \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$

6. $1, -1, \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$

7. $1, \frac{1}{2}(1+\sqrt{2} \pm \sqrt{2\sqrt{2}-1}), \ \frac{1}{2}(1-\sqrt{2} \pm i\sqrt{2\sqrt{2}+1})$

8. $1, -1, \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}, \ \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$

9. $1, 3, \frac{1}{3}, -2, -\frac{1}{2}$

Exercises 12-1—ಅಭ್ಯಾಸ 12.1

1. $-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}(-1 \pm i\sqrt{3})$
2. $2, -1 \pm i\sqrt{6}$

3. $\frac{5^{\frac{1}{3}} - 2k \cdot 3^{\frac{1}{3}}}{5^{\frac{1}{3}} - k \cdot 3^{\frac{1}{3}}}$, where $k = 1, \omega, \omega^2$

4. $\frac{-4^{\frac{1}{3}} - 2k \cdot 3^{\frac{1}{3}}}{4^{\frac{1}{3}} - k \cdot 3^{\frac{1}{3}}}$, $k = 1, \omega, \omega^2$.

5. $\frac{-3 \pm i\sqrt{11}}{2}, \ \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

6. $1, 3, -1 \pm \sqrt{2}$.

GLOSSARY ಪಾರಿಭಾಷಿಕ ಪದಗಳು

ಇಂಗ್ಲೀಷ್–ಕನ್ನಡ

Absolute value	ಧನಾತ್ಮಕ ಬೆಲೆ, ಮಾಡ್ಯುಲಸ್
Adjoint matrix	ಸಂಗತ ಕೋಶ
Amplitude	ಕೋಣಾಂಕ
Array	ಜೋಡಣೆ
Associative law	ಸಹವರ್ತನೆ
Augmented matrix	ವರ್ಧಿತ ಕೋಶ
Automorphism	ಸ್ವಾನುಕ್ರಮಣ
Axiom	ಸ್ವತಸ್ಸಿದ್ಧ ಪ್ರಮಾಣ
Calculus	ಕಲನ ಶಾಸ್ತ್ರ
Cancellation	ನಿರಸನ ಕ್ರಿಯೆ
Cardinal number	ಸಂಖ್ಯಾಸೂಚಕ ಅಂಕಿ
Cofactor	ಸಹಗುಣಕ
Column	ನೀಟು ಸಾಲು
Commutative law	ಪರಿವರ್ತನೆ
Complex number	ಮಿಶ್ರ ಸಂಖ್ಯೆ
Complement	ಪೂರಕ
Composite	ಸಮಾಸ
Conjugate	ಅನುವರ್ತ
Cubic	ಘನ
Decreasing	ಅವರೋಹಕ
Determinant	ನಿರ್ಧಾರಕ
Difference	ಅಂತರ
Differential calculus	ಚಲನ ಕಲನ
Distributive law	ವಿಭಾಜಕ ನಿಯಮ
Domain	ಪ್ರಾಂತ
Elements of a set	ಗಣಾಂಶಗಳು
Elementary transformation	ಸುಲಭ ರೂಪಾಂತರ
Eliminant	ವಿಸರ್ಜ್ಯ
Elimination	ವಿಸರ್ಜನೆ

Enumerable	ಸಂಖ್ಯೇಯ
Equate	ಸಮೀಕರಿಸು
Equivalence class	ಸಮಾನತಾ ವರ್ಗ
Equivalence relation	ಸಮಾನತಾ ಸಂಬಂಧ
Field	ಕ್ಷೇತ್ರ
Finite	ಪರ್ಯಾಪ್ತ
Formula	ಸೂತ್ರ
Homogeneous	ಸಮ ಪ್ರಮಾಣದ
Identity	ಏಕ
Image	ಛಾಯೆ, ಚಿತ್ರಣ, ಚಿತ್ರ, ನಕ್ಷೆ
Increasing	ಆರೋಹಕ
Infinite	ಅಪರ್ಯಾಪ್ತ, ಅನಂತ
Initial line	ಮೂಲರೇಖೆ
Integral domain	ಅಂಕಮುಖ ಪ್ರಾಂತ
Intersection	ಛೇದನ
Inverse	ಪ್ರತಿಲೋಮ
Inversion	ವ್ಯತಿಕ್ರಮ
Isomorphism	ಸಮಾನುಕ್ರಮಣ
Linear	ಸರಳ
Linear dependence	ಸರಳ ಸಂಬಂಧ
Linearly independent	ಸರಳ ಸ್ವತಂತ್ರ
Linear equation	ಸರಳ ಸಮೀಕರಣ
Mathematical induction	ಗಣಿತಾನುಮಾನ
Matrix	ಕೋಶ
Minor	ಲಘು
Natural number	ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ
Non-homogeneous	ಅಸಮಪ್ರಮಾಣದ
Null	ಶೂನ್ಯ
One-to-one correspondence	ಏಕ-ಏಕ ಹೊಂದಾಣಿಕೆ
Order	ಕ್ರಮ
Ordered pair	ಕ್ರಮಯುಗ್ಮ
Partition	ವಿಂಗಡಣೆ
Polar	ಧ್ರುವೀಯ

Pole	ಧ್ರುವ
Polynomial	ಬಹುಪದಿ
Post-multiply	ಮುಂಗುಣಿಸು
Postulate	ಮೂಲಭಾವನೆ
Power-set	ಘಾತ ಗಣ
Pre-multiply	ಹಿಂಗುಣಿಸು
Principal diagonal	ಪ್ರಧಾನ ಕರ್ಣ
Proper	ಶುದ್ಧ
Quartic	ಚತುರ್ಘಾತ
r-ple	r-ಮಡಿ
Rank	ದರ್ಜೆ
Range	ವ್ಯಾಪ್ತಿ
Rational number	ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ
Reciprocal equation	ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮ ಸಮೀಕರಣ
Reflexivity	ಪ್ರತಿಫಲನ
Remainder theorem	ಶೇಷ ಪ್ರಮೇಯ
Ring	ವಲಯ
Root	ಮೂಲ
Row	ಅಡ್ಡಸಾಲು
Scalar matrix	ಅದಿಶ ಕೋಶ
Sequence	ಶ್ರೇಢಿ
Set	ಗಣ
Simultaneous	ಸಮಕಾಲಿಕ
Single-valued	ಏಕಮೌಲ್ಯವುಳ್ಳ
Singular	ವೈಶೇಷಿಕ
Skew matrix	ವಿಸಮಾಂಗ ಕೋಶ
Square matrix	ಚೌಕುಳಿ ಕೋಶ
Successor	ಉತ್ತರಾಂಶ
Subfield	ಉಪಕ್ಷೇತ್ರ
Subset	ಉಪಗಣ
Symmetry	ಸಮಾಂಗತೆ
Symmetric matrix	ಸಮಾಂಗ ಕೋಶ
Sweep out process	ಮಾರ್ಜನ ಕ್ರಿಯೆ

Theory of equations	ಸಮೀಕರಣ ಸಿದ್ಧಾಂತ
,, sets	ಗಣ ಸಿದ್ಧಾಂತ
Transformation	ರೂಪಾಂತರ, ಪರಿವರ್ತನೆ
Transitivity	ವಾಹಕ ಗುಣ
Transpose	ಅದಲು
Transposition	ಅದಲುಬದುಲು
Trichotomy	ತ್ರಿಚ್ಛೇದ್ಯತೆ
Unenumerable	ಅಸಂಖ್ಯೇಯ
Union	ಸಂಯೋಗ
Unit matrix	ಏಕಮಾನ ಕೋಶ
Universal set	ವಿಶ್ವ ಗಣ
Unknown	ಅವ್ಯಕ್ತ
Vector	ಸದಿಶ
Well-ordering	ಸುಕ್ರಮತೆ

ಕನ್ನಡ–ಇಂಗ್ಲೀಷ್ :

ಅಂಕ ಮುಖಪ್ರಾಂತ	integral domain
ಅಂತರ	difference
ಅಡ್ಡಸಾಲು	row
ಅದಲು	transpose
ಅದಲುಬದುಲು	transposition
ಅದಿಶ	scalar
ಅನುವರ್ತ	conjugate
ಅಪರ್ಯಾಪ್ತ	infinite
ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ	irrational number
ಅವರೋಹಕ	decreasing
ಅವ್ಯಕ್ತ	unknown
ಅಸಂಖ್ಯಾತ	infinite
ಅಸಂಖ್ಯೇಯ	unenumerable
ಅಸಮ ಪ್ರಮಾಣದ	non-homogeneous
ಆರೋಹಕ	increasing

ಉಪಕ್ಷೇತ್ರ	subfield
ಉಪಗಣ	subset
ಉತ್ತರಾಂಶ	successor
ಏಕ	identity
ಏಕ-ಏಕ ಹೊಂದಾಣಿಕೆ	one-to-one correspondence
ಏಕ ಮಾನಕೋಶ	unit matrix
ಏಕ ಮೌಲ್ಯವುಳ್ಳ	single-valued
ಕಲನ ಶಾಸ್ತ್ರ	calculus
ಕ್ರಮ ರಚನೆ	order
ಕ್ರಮ ಯುಗ್ಮ	ordered pair
ಕ್ಷೇತ್ರ	field
ಕೋಣಾಂಕ	amplitude
ಕೋಶ	matrix
ಗಣ	set
ಗಣಾಂಶ	element of a set
ಗಣ ಸಿದ್ಧಾಂತ	theory of sets
ಗಣಿತಾನುಮಾನ	mathematical induction
ಗುಣಕ	coefficient
ಗುಣಕ ಕೋಶ	coefficient matrix
ಘನ	cubic
ಘಾತ ಗಣ	power set
ಚತುಷ್ಘಾತ	quartic
ಚಲನ ಕಲನ	differential calculus
ಚೌಕುಳಿ ಕೋಶ	square matrix
ಚಿತ್ರ, ಚಿತ್ರಣ	image
ಛಾಯೆ	image
ಛೇದನ	intersection
ಜೋಡಣೆ	array
ತ್ರಿಚ್ಛೇದ್ಯತೆ	trichotomy
ದರ್ಜೆ	rank
ಧನಾತ್ಮಕ ಬೆಲೆ	absolute value

ಧ್ರುವ	pole
ಧ್ರುವೀಯ	polar
ನಕ್ಷೆ	graph
ನಿರ್ಧಾರಕ	determinant
ನಿರಸನ ಕ್ರಿಯೆ	cancellation
ನೀಟು ಸಾಲು	column
ಪರ್ಯಾಪ್ತ	finite
ಪರಿಮಾಣ	dimension
ಪರಿವರ್ತನೆ	commutativity, transformation
ಪ್ರತಿಫಲನ	reflexivity
ಪ್ರತಿಲೋಮ	inverse
ಪ್ರಧಾನ ಕರ್ಣ	principal diagonal
ಪ್ರಾಂತ	domain
ಪೂರಕ	complement
ಬಹುಪದಿ	polynomial
ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ	rational number
r-ಮಡಿ	r-ple
ಮಾರ್ಜನ ಕ್ರಿಯೆ	sweep-out process
ಮಾಡ್ಯುಲಸ್	absolute value, modulus
ಮಿಶ್ರ ಸಂಖ್ಯೆ	complex number
ಮುಂಗುಣಿಸು	post-multiply
ಮೂಲ	root
ಮೂಲ ಭಾವನೆ	postulate
ಮೂಲ ರೇಖೆ	initial line
ಲಘು	minor
ವರ್ಧಿತಕೋಶ	augmented matrix
ವಲಯ	ring
ವಾಹಕ	transitive
ವ್ಯತಿಕ್ರಮ	inverse
ವ್ಯಾಪ್ತಿ	range
ವಿಂಗಡಣೆ	partition
ವಿಭಾಜಕ ನಿಯಮ	distributive law
ವಿಶ್ವ ಗಣ	universal set
ವಿಸರ್ಜನೆ	elimination

ವಿಸರ್ಜ್ಯ	eliminant
ವಿಸಮಾಂಗ ಕೋಶ	skew-symmetric matrix
ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮಸಮೀಕರಣ	reciprocal equation
ವೈಶೇಷಿಕ ಕೋಶ	singular matrix
ಶುದ್ಧ	proper
ಶೂನ್ಯ	null
ಶ್ರೇಢಿ	sequence
ಶೇಷಪ್ರಮೇಯ	remainder theorem
ಸಂಗತಕೋಶ	augmented matrix
ಸಂಖ್ಯಾಸೂಚಕ ಅಂಕಿ	cardinal number
ಸಂಖ್ಯೇಯ	enumerable
ಸದಿಶ	vector
ಸಮಕಾಲಿಕ	simultaneous
ಸಮ ಪ್ರಮಾಣದ	homogeneous
ಸಮಾಂಗತೆ	symmetric
ಸಮಾಂಗ ಕೋಶ	symmetric matrix
ಸಮಾನತಾ ಸಂಬಂಧ	equivalence relation
ಸಮಾನತಾ ವರ್ಗ	equivalence class
ಸಮಾನುಕ್ರಮಣಿ	isomorphism
ಸಮಾಸ	composite
ಸಮೀಕರಣ	equation
ಸಮೀಕರಿಸು	equate
ಸ್ವತಸ್ಸಿದ್ಧ ಪ್ರಮಾಣ	axiom
ಸಂಯೋಗ	union
ಸರಳ ಸಂಬಂಧ	linear relation
ಸರಳ ಸ್ವತಂತ್ರ	linearly independent
ಸರಳ ಸಮೀಕರಣ	linear equation
ಸಹಗುಣಕ	cofactor
ಸಹವರ್ತನೆ	associative property
ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ	natural number
ಸ್ವಾನುಕ್ರಮಣಿ	automorphism
ಸಾಲು ಕ್ರಮದ	linear
ಸುಲಭ ರೂಪಾಂತರ	elementary transformation
ಸೂತ್ರ	formula
ಹಿಂಗುಣಿಸು	pre-multiply

ERRATA ತಿದ್ದುಪಡಿಗಳು

E = English version   K = Kannada version

page ಪುಟ	*line* ಪಂಕ್ತಿ	*For* ಬದಲಾಗಿ	*Read* ತಿದ್ದಿಕೊಳ್ಳಿ
3E	foot note	$B \subseteq A$	$B \supseteq A$
3 K	ಟಿಪ್ಪಣಿ	$B \subseteq A$	$B \supseteq A$
4 E	6	Ar	A_r
7 K	13	ಡಿರಕೃಕೂದಸಳರೇಖಾ	ಕೂಡಿದ ಸರಳ ರೇಖಾಕೃತಿ
19 E	21	F^-	F^{-1}
22 K	14	$=2$	$=2^n$
23 K	17	ವಾಸ್ತವ್ಯ	ವಾಸ್ತವ
24 K	8	ಗುಣಾಂಶ	ಗಣಾಂಶ
,,	15	,,	,,
38 E	16	S*a*	S_a
48 E	5	We	we
55 E	7	Associatative	Associative
59 K	10	*e/*	*e/f*
65 E, K	Fig. 2.3	1	—1
67 E	4	$\alpha - 1$	α^{-1}
68 E	3	a^1	a_1
69 E	2, 3	$1/\sqrt{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
70 K	5	ನು	ನ್ನು
,,	15	ವೊ	ವೂ
81 E	5	$b\sqrt{\ }$	$b\sqrt{3}$
93 K	11	$\overline{Z}$	Z
100 K.	16	*n*, !	*n* !

page ಪುಟ	*line* ಪಂಕ್ತಿ	*For* ಬದಲಾಗಿ	*Read* ತಿದ್ದಿಕೊಳ್ಳಿ
110 E	4	artifies	artifices
118 E	3, 4	x, y	X, Y
119 E	5	A^3	A_3
126 K	24	a	a_{11}
127 K	20	ಕೋಶವನ್ನೂ	ಕೋಶವನ್ನು
128 K	18	$a\ b_{11}$	$a_{21}\ b_{11}$
,,	30	$(m \times p)$	$(m \times p)$—ಕೋಶ
138 K	1	ವೈಶೇಷಿಕವಿಲ್ಲದ	ವೈಶೇಷಿಕವಲ್ಲದ
147 K	7	$m+n$	$m \times n$
149 K, E	last	d_{nn}	d_{mn}
150 K	11	0 0……0	0 0……1
154 E	25	Z	a
162 E	12	X	x
,, K	23	ಅವ್ಯಕ್ತಗಳುಳ್ಳ	4 ಅವ್ಯಕ್ತಗಳುಳ್ಳ
172 K	18	ಅವಿಚಿನ್ನತೆ	ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನತೆ
181 K	15	ಇವರ	ಇದರ

